Ministero dell'Istruzione
Ufficio Scolastico Regionale per il Lazio
Liceo Scientifico Statale "Augusto Righi"
Via Campania, 63 - 00187 Roma
✉ RMPS280004@istruzione.it ✉ RMPS280004@pec.istruzione.it
www.liceoaugustorighiroma.it

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

Problema 1
Si consideri la famiglia di funzioni

$$f(x) = \frac{a-x}{x^2-2x+5}$$

al variare del parametro reale a.

1. Dopo aver studiato dominio e continuità di $f(x)$ al variare di a, si mostri che la funzione ammette sempre massimo e minimo assoluto.

2. Si indichi con $g(x)$ la funzione della famiglia che si ottiene ponendo $a = 1$. Si studi la funzione $g(x)$ nel modo più esauriente possibile (dominio, codominio, segno, eventuali asintoti, continuità, derivabilità, monotonia, concavità) e se ne tracci il grafico.

3. Si determini l'altezza del rettangolo di base $[0, 1]$ equivalente alla regione limitata del primo quadrante compresa tra $g(x)$ e gli assi coordinati.

4. Si dimostri, con opportune argomentazioni, che $g(x)$ è simmetrica rispetto a un punto. Si determini tale punto.

Problema 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = 2\frac{\ln(x-2)}{(x-2)}$$

1. Si studi la funzione $f(x)$ nel modo più esauriente possibile (dominio, codominio, segno, eventuali asintoti, continuità, derivabilità, monotonia, concavità) e se ne tracci il grafico.

2. Tra le sue primitive, sia $F(x)$ quella che passa per il punto $A(3; -1)$. Si determini la forma analitica di $F(x)$, si studi tale funzione nel modo più esauriente possibile (dominio, codominio, segno, eventuali asintoti, continuità, derivabilità, monotonia, concavità) e se ne tracci il grafico.

3. Si determini l'area del triangolo individuato dagli assi cartesiani e dalla retta tangente al grafico di $F(x)$ nel suo punto di flesso.

4. Si stabilisca se l'equazione

$$2\frac{\ln(x-2)}{(x-2)} - \ln^2(x-2) = 1$$

ammette soluzioni oppure no, motivando in modo adeguato la risposta.

Questionario

1. Si trovino le derivate delle seguenti funzioni:

$$F(x) = \int_{x^2}^{9} e^{t^2} dt$$

$$G(x) = \int_{x}^{x^2} e^{t^2} dt$$

2. Un segmento misura a; un secondo segmento è k^2 volte il primo e un terzo segmento è $\frac{1}{k^3}$ volte il secondo, con k qualunque numero reale positivo.
Di tutti i trapezi che hanno per basi i primi due segmenti e per altezza il terzo, si verifichi che quello di area minima è un quadrato.

3. 20 m di staccionata devono essere posizionati a forma di triangolo rettangolo. Quali devono essere le sue dimensioni in modo da massimizzare l'area racchiusa?

4. Si discuta la continuità e la derivabilità della seguente funzione in $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 5 + \frac{\sin^2 ex}{x} & \text{se x}\neq 0 \\ 5 & \text{se x=0} \end{cases}$$

5. Si calcolino i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{x^2}}{\cos^2 x - 1}$

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{x^2}}{\cos^3 x - 1}$

6. Si trovi un punto sull'arco della funzione $y = \frac{1}{x^2}$ compreso tra i punti $A(1;1)$ e $B(3;\frac{1}{9})$, tale che la tangente in questo punto sia parallela alla corda AB.

7. Il grafico della funzione $y = \sqrt{x+1}$ divide in due porzioni il rettangolo $ABCD$ avente vertici $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C(3;2)$ e $D(0;2)$. Si calcoli il rapporto tra le aree delle due porzioni.

8. Si stabilisca se la seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{9x^2 - 3x + 1}$$

   ammette asintoti obliqui e, in caso affermativo, se ne determinino le equazioni.

Durata massima della prova: 6 ore

E' consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. 65/2022)

E' consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema