COMMISSIONI LI02050–LI02051–LI02052
ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: LI02 – SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA – Traccia n. 1

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Un'influenza si diffonde molto rapidamente in un paese, e i contagi (in migliaia)[1] evolvono seguendo un andamento descritto dalla seguente funzione

$$y = f(t) = \frac{Ae^{-kt}}{(1+Be^{-kt})^2}, \quad \text{con } A, B \in \mathbb{N}, t \geq 0 \text{ e } k = \frac{1}{10}.$$

La variabile t rappresenta il tempo, misurato in giorni, con $t = 0$ corrispondente al giorno in cui sono stati registrati 10000 contagi. I virologi, analizzando i dati in loro possesso, prevedono che il picco della curva dei contagi si raggiungerà il ventiduesimo giorno.

1. Determinare i valori dei parametri A e B in modo che siano verificate le condizioni sopra descritte. Se necessario, approssimare i risultati ai valori naturali più prossimi.

2. Considerando $A = 1000$ e $B = 9$, tracciare un grafico qualitativo della funzione f, prescindendo dal problema (cioè considerando t una variabile reale) ed effettuando lo studio fino alla derivata prima. Secondo il modello proposto, determinare la velocità di crescita dei nuovi contagi giornalieri nel nono giorno di epidemia.

3. Dedurre con sole considerazioni logiche, a partire dal grafico della funzione f, un grafico qualitativo della funzione $y = f'(t)$. Determinare il significato della funzione f' nel contesto del problema, cioè in relazione all'evoluzione dell'epidemia.

4. Si consideri ora la funzione integrale:

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx, \quad \text{con } t \geq 0$$

Determinare la sua espressione analitica e tracciarne un grafico qualitativo. Determinare il significato della funzione F nel contesto del problema. Secondo il modello espresso dalla funzione F, determinare quanti contagi vengono registrati complessivamente nei primi 30 giorni di epidemia. Determinare il significato dell'asintoto orizzontale della funzione F in relazione all'evoluzione dell'epidemia.

5. Il governo interviene con misure drastiche di contenimento dell'epidemia a partire dal decimo giorno. Grazie ad esse la funzione che descrive l'evoluzione dei contagi giornalieri diviene

$$y = g(t) = \frac{t+10}{1+(t-10)^2}, \quad t \geq 10.$$

[1] Ad esempio, se la funzione assume il valore $y = 3$, significa che ci sono stati $3 \cdot 1000 = 3000$ contagi.

Determinare il numero di contagi totali nei primi 30 giorni di epidemia, tenendo conto delle misure adottate dal governo.

PROBLEMA 2

La figura mostra il grafico G della funzione derivabile $y = f(x)$ per $x \in [-1; 4]$. G presenta due punti stazionari in O e B e le aree delle regioni di piano A_1, A_2, A_3 e A_4 sono rispettivamente $\frac{5}{4}$; 4; $\frac{11}{4}$ e $\frac{27}{4}$.

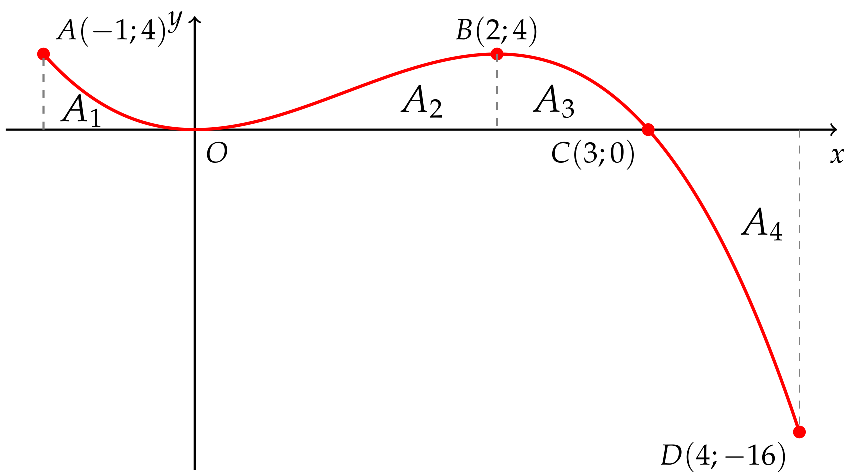

Figura 1

Sia F la funzione integrale di f relativa al punto $x = 0$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

1. Calcolare $F(-1)$, $F(0)$, $F(2)$, $F(3)$ e $F(4)$. Individuare i punti di massimo, di minimo e di flesso della funzione F e tracciarne il grafico probabile. Determinare quindi la retta t tangente al grafico della funzione F nel suo punto di ascissa 2.

2. Verificare che la funzione F soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[0; 4]$ e si determinino il o i valori c che soddisfano la tesi del teorema stesso.

3. Assumendo da ora in poi che la funzione $f(x)$ sia descritta da un polinomio di terzo grado, determinare l'espressione analitica della funzione F e determinare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico di F, dalla retta t e dall'asse y.

4. Si consideri ora la funzione $f(x)$ e si costruisca un triangolo avente i vertici, rispettivamente, nell'origine degli assi cartesiani, nel punto della funzione di ascissa k, e nel punto P sua proiezione sull'asse x. Determinare il valore $0 \leq k \leq 3$ per cui la sua area risulta massima.

5. Volendo approssimare il grafico di $f(x)$ con una funzione della forma

   $$y = x^A e^{B-x}, \qquad A, B > 1$$

   determinare i valori di A e B in modo che presenti gli stessi punti stazionari.

QUESTIONARIO

1. Determinare per quale valore del parametro reale positivo k la funzione
$$f(x) = \frac{1}{e} + \frac{3}{2}xe^{k\frac{x}{2}}$$
ha minimo assoluto uguale a zero.

2. Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$$

3. Si consideri la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + \frac{3}{2} & \text{se } x < 1 \\ e^{b-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$
Determinare i parametri reali a e b in modo che la funzione risulti continua e derivabile in tutto il suo dominio.

4. Si consideri la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{se } x \leq 3 \\ \ln(x-2) & \text{se } x > 3 \end{cases}$$
Dimostrare che $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[2;4]$ e determinare l'ascissa del o dei punti che ne soddisfano la tesi.

5. Dimostrare che l'equazione:
$$\arctan(-x) = 2x^3$$
ha una e una sola soluzione reale.

6. Data la funzione
$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 2}$$
determinare il valore dei parametri a, b e c in modo tale che la retta $y = 3x - 8$ sia un suo asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e la retta tangente al grafico della funzione nel suo punto di ascissa $x = 0$ formi un angolo di 45° con la direzione positiva dell'asse x.

7. La funzione $y = \ln x$ divide in due parti il rettangolo di vertici $A(1;0)$, $B(e^2;0)$, $C(e^2;2)$ e $D(1;2)$. Determinare la differenza tra le aree delle due parti.

8. Dimostrare che le curve di equazione $y = x^2 + kx + k$ passano tutte per uno stesso punto.

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.