

23 Giugno 2022

Tema di: Matematica

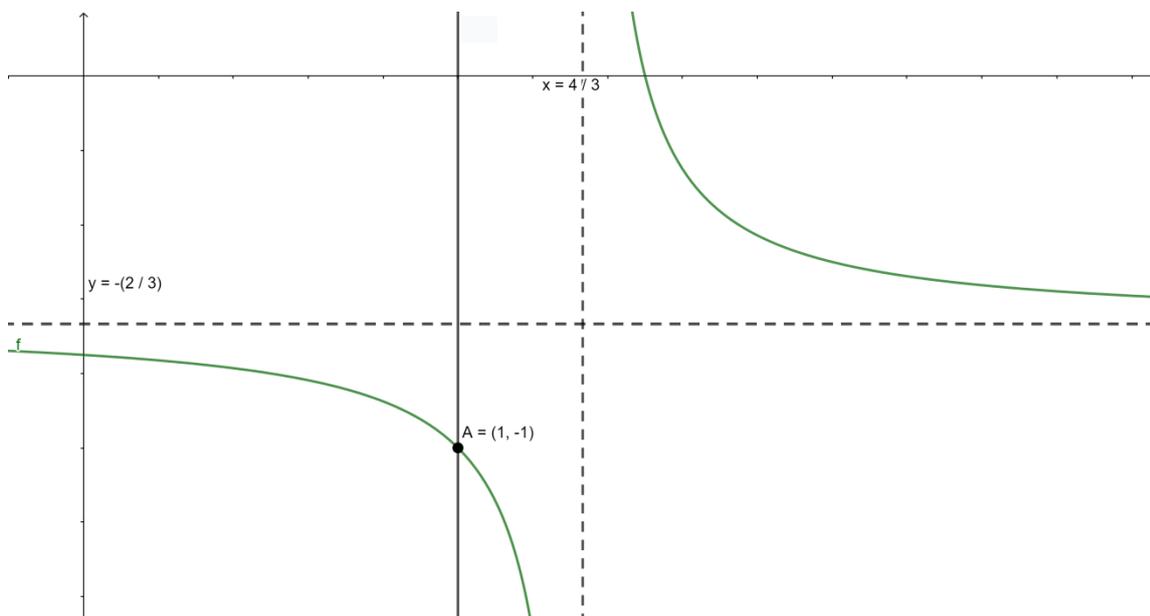
PROVA: A

il candidato risolve uno dei problemi e risponde a quattro dei quesiti proposti

PROBLEMA 1

Si data la funzione $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

- a. determinare a, b, c, d con $a \neq 0, b, c \neq 0, d \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione sia rappresentata dal grafico e che la pendenza della funzione nel punto di ascissa $x = 1$ sia uguale a $\frac{a}{2}$.



Dopo aver constatato che la funzione è $f(x) = \frac{-2x+3}{3x-4}$:

- b. Determinare le equazioni delle tangenti nei punti d’intersezione della funzione con gli assi cartesiani e il loro punto d’intersezione detto K
- c. Calcola l’area della figura delimitata dalla tangente alla funzione nella sua intersezione con l’asse delle ordinate, dal grafico della funzione e dalla retta verticale passante per A
- d. Detto P un punto del ramo della funzione che passa per il primo quadrante, determinare le coordinate di P in modo che l’area del triangolo APO sia minima

PROBLEMA 2

Sia data la semicirconferenza AB di raggio R, traccia una retta parallela al diametro che incontra l'arco AB in due punti C (sopra B) e D (sopra A).

- Determinare il valore dell'angolo CAB in modo che l'area del trapezio ABCD sia massima e l'area che si ottiene in corrispondenza di tale valore.
- Detta $A(x)$ la funzione che descrive l'area del trapezio, individuare l'espressione della funzione $f(x) = \left| \frac{2A(x)}{CA^2} \right|$ e verificare che può essere ricondotta a $f(x) = |\sin(2x)|$
- Tracciare il grafico di $f(x)$ nell'intervallo $[-\pi; \pi]$ studiando la sua continuità e derivabilità in $x = \frac{\pi}{2}$
- Calcola l'area della regione di piano compresa tra la funzione $f(x)$ e la retta $y = \frac{1}{2}$ nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

QUESITI

- Determina graficamente il numero di soluzioni reali della seguente equazione $\sqrt{x} + \log x = 0$
- La funzione $f(x) = |x^3 - 4x^2 + 4x|$ verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[0; 2]$? In caso affermativo, determina il punto in cui è verificata la tesi. Quale tipo di particolarità presenta la funzione in $x = 0$?
- Determinare la funzione $f(x)$ sapendo che $f''(x) = -12x^2 + 12x - 2$ e che la retta tangente nel punto $x = -1$ ha equazione $12x - y + 8 = 0$
- Tra tutte le primitive della funzione $f(x) = x \cdot \sqrt{5x^2 - 2}$ si individui quella che assume valore $\frac{16}{15}$ per $x = \sqrt{\frac{3}{5}}$
- Studiare continuità e derivabilità della funzione $f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x - 2}$ classificando eventuali punti di discontinuità e non derivabilità
- Determinare a, b e c reali, affinché la curva $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$ abbia per asintoto verticale la retta $x = 1$ e nel punto $(0; -4)$ la retta tangente sia parallela alla bisettrice del 2° e 4° quadrante.
- Quali punti del grafico della funzione $f(x) = \frac{2}{x^2}$ hanno distanza minima dall'origine?
- Calcola il seguente integrale indefinito $\int \left(\frac{12x + 27}{x^2 + x - 12} + \ln(4x) \right) dx$

Durata massima della prova: 5 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 2 ore dalla dettatura del tema.