PROBLEMA 1

In un sistema di riferimento cartesiano *xOy*, si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\ln x, & se\ x > 0 \\ a, & se\ x = 0 \end{cases}$$

e si determini il valore del parametro reale a in modo tale che la funzione sia continua nel suo dominio.

Per il valore di a così ottenuto:

a) si stabilisca l'insieme di derivabilità della funzione;
b) si studi e si rappresenti il grafico Γ della funzione;
c) si determini l'equazione dell'arco di parabola P con asse coincidente con l'asse x, vertice nell'origine e passante per il punto di Γ di ascissa $x = e$;
d) nella regione finita di piano compresa tra la parabola P e la curva Γ si conduca una retta parallela all'asse delle ordinate e si indichi con $g(x)$ la misura in funzione di $x$della corda intercettata da tale retta sulle due curve. Si determini, se esiste, il massimo della funzione $g(x)$.
e) Si calcoli $\lim_{k\to 0^+} \mathcal{A}(k)$, dove la funzione $\mathcal{A}(k)$ esprime il valore dell'area della regione finita di piano delimitata dal grafico Γdella funzione $f(x)$e dall'asse delle ascisse nell'intervallo $[k; 1]$, con $0 < k < 1$.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x < -1 \\ x\sqrt{1-x^2} & \text{se} \quad -1 \le x \le 1 \\ \ln x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Si determini l'intervallo di continuità della funzione e si trovino, inoltre, eventuali punti in cui la funzione non è derivabile.
b) Si tracci il grafico determinando eventuali punti di flesso.
c) Si studino eventuali simmetrie su tutto il dominio o su eventuali restrizioni di esso.
d) Dopo aver enunciato il teorema di Rolle, si stabilisca se nell'intervallo $\left[\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{8}}{3}\right]$la funzione soddisfa le ipotesi del teorema citato, e in caso affermativo si determini il o i valori di cui il teorema prevede l'esistenza. Successivamente si determini quale deve essere il valore di k affinché la funzione soddisfi il teorema nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}, k\right]$
e) Si calcoli l'area della regione finita di piano individuata da $f(x)$, dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = \pm 1$

QUESITI

1)Tra tutti i trapezi inscritti in una semicirconferenza di raggio r e aventi per base maggiore il diametro determinare quello avente area massima.

2)Dopo aver enunciato il Teorema di Lagrange, verificare, motivando la risposta, che solo ad una delle seguenti due funzioni il teorema è applicabile nell'intervallo $[1;2]$:

$$a)\ y=\sqrt[5]{(3x-5)^4}-1;\quad b)\ y=1-\sqrt[3]{(x-1)^4}$$

Per la funzione per cui il teorema è applicabile, determina il (o i) valori previsti da esso.

3)Enunciare il teorema del valor medio e darne l'interpretazione geometrica. Determinare quindi il valor medio della funzione

$$f(x)=\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}$$

nell'intervallo $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

4)Verificare che la funzione

$$y(x)=\ln\sin^2 x+k,$$

con *k* costante reale arbitraria, soddisfa la relazione

$$(y'+y'')\sin^2 x=\sin 2x-2$$

Determinare quindi per quale valore di *k* si ha

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

5) Determinare, <u>attraverso la definizione</u>, la derivata della funzione

$$y=\frac{x^2+1}{x-3}$$

nel punto di ascissa $x = 5$

6) Dimostrare che la funzione $f(x)=x^2e^{-2x}$ è invertibile nell'intervallo $(1;+\infty)$ e calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $y_0=\frac{4}{e^4}$

7) Posto

$$f(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt,$$

si calcoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x^2}$$

8) Determinare per quali valori di *a* e *b* il graficodella funzione

$$y=ax+b+\sqrt{x^2+9x+3}$$

ha per asintoto obliquo destro la retta di equazione$y=2x+6$