PROBLEMA 1

In un sistema di riferimento cartesiano *xOy*, si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\ln x, & se\ x > 0 \\ a, & se\ x = 0 \end{cases}$$

e si determini il valore del parametro reale a in modo tale che la funzione sia continua nel suo dominio.

Per il valore di a così ottenuto:

a) si stabilisca l'insieme di derivabilità della funzione;
b) si studi e si rappresenti il grafico Γ della funzione;
c) si determini l'equazione dell'arco di parabola P con asse coincidente con l'asse x, vertice nell'origine e passante per il punto di Γ di ascissa $x = e$;
d) nella regione finita di piano compresa tra la parabola P e la curva Γ si conduca una retta parallela all'asse delle ordinate e si indichi con $g(x)$ la misura in funzione di $x$della corda intercettata da tale retta sulle due curve. Si determini, se esiste, il massimo della funzione $g(x)$.
e) Si calcoli $\lim_{k\to 0^+} \mathcal{A}(k)$, dove la funzione $\mathcal{A}(k)$ esprime il valore dell'area della regione finita di piano delimitata dal grafico Γdella funzione $f(x)$e dall'asse delle ascisse nell'intervallo $[k; 1]$, con $0 < k < 1$.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \ln(x+e) \text{se } -e < x < 0 \\ (x^2+bx)e^{-x} + a, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Si calcolino i valori di a e di b in modo tale che la funzione risulti continua nel suo dominio e che il suo grafico passi per il punto $P(2; 1)$
b) Dopo aver verificato che i valori in questione sono $a = 1, b = -2$, si indichi con $f(x)$ la funzione corrispondente, se ne effettui uno studio completo e se ne rappresenti il grafico
c) Si esamini in particolare la natura del punto di ascissa nulla e si trovi, se possibile, la o le tangenti in detto punto
d) Si calcoli il valore dell'area compresa tra il grafico della funzione, l'asse delle ordinate e l'asse delle ascisse tra -1 e 0
e) Si verifichi che esiste un'unica tangente al grafico della funzione $f(x)$parallela alla bisettrice del I e III quadrante.

QUESITI

1) Determinare per quale/i valore/i di k la tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \ln x^2$$

nel punto di ascissa $x = k$ passa per l'origine degli assi.

2) Posto

$$f(x) = \int_0^x (-1 + e^t)dt,$$

si calcoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sin^2 x}$$

3) Tra tutti i trapezi inscritti in una semicirconferenza di raggio r e aventi per base maggiore il diametro determinare quello avente area massima.

4) Determinare, <u>attraverso la definizione</u>, la derivata della funzione

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

nel punto di ascissa $x = 3$

5) Assegnata la funzione $f(x) = 3\ln x + 2x^2$, dimostrare che è invertibile nel proprio dominio, quindi determinare la derivata della funzione $g(x) = f^{-1}(x)$, inversa di $f(x)$ nel suo punto di ascissa 2, e l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto considerato.

6) Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}}$$

7) Dopo aver enunciato il Teorema di Lagrange, verificare, motivando la risposta, che solo ad una delle seguenti due funzioni il teorema è applicabile nell'intervallo *[0; 2]* :

$$a)\ y = 1 - \sqrt[3]{x^4}; \quad b)\ y = \sqrt[5]{(x-1)^3}$$

Per la funzione per cui il teorema è applicabile, determina il (o i) valori previsti da esso.

8) Interpretare il significato geometrico del seguente integrale definito, e, tramite tale significato e le proprietà generali, calcolarne il valore:

$$\int_{-2}^{2} \left[\sqrt{4 - x^2} - (2 - |x|)\right] dx$$