SECONDA PROVA

DELL'ESAME DI STATO PER IL LICEO SCIENTIFICO

Si risolva uno dei due problemi e si risponda a 4 quesiti.

Problema 1

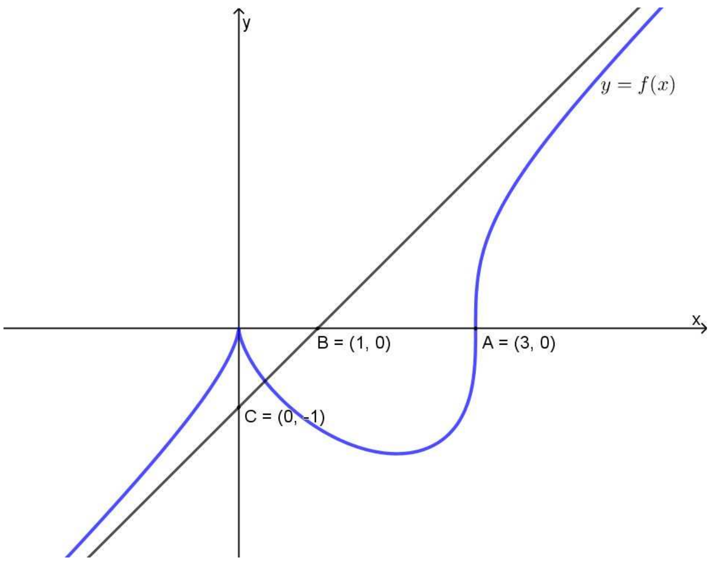
Assegnate le funzioni reali $f(x) = \ln\frac{1}{x^2}$ e $g(x) = e^{-x}$, e indicati con F e G i loro grafici in un riferimento cartesiano Oxy:

1. Si stabilisca dominio e codominio delle funzioni f e g, e se ne traccino quindi i grafici relativi alle funzioni $a(x) = f(g(x))$ e $b(x) = g(f(x))$.
2. Si determini l'equazione della retta r, tangente a F nel suo punto di ascissa e^2. Si stabilisca inoltre se esiste una retta s, parallela a r, che sia tangente a G e, in caso affermativo, se ne determini l'equazione.
3. Si calcoli il valor medio della funzione $f(x)$ nell'intervallo $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$.
4. Sia A la regione piana finita delimitata dall'asse y, dalla parabola passante per l'origine, con asse di simmetria parallelo all'asse y e di vertice $(2, -4)$ dalla retta di equazione $x = 1$ e dal grafico G. Si determini l'area A.
5. Sia B la regione piana finita delimitata dall'asse y, dalla retta $y = x - 1$, dalla retta $x = 1$ e dal grafico di G. Si determini il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando B di un giro completo intorno all'asse y.

Problema 2

In figura è rappresentato il grafico di una funzione del tipo:

$$f(x) = \sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + c}$$



1. Dalle informazioni ricavabili dal grafico, si determinino i valori di *a, b* e *c.*

Verificato che $a = 1,\ b = -3\ \ e\ \ c = 0$:

2. Si stabilisca la natura dei punti $0(0; 0)$ e $A(3, 0)$ giustificando le proprie affermazioni anche algebricamente.
3. Si deduca dal grafico di $f(x)$ il grafico di $f'(x)$.

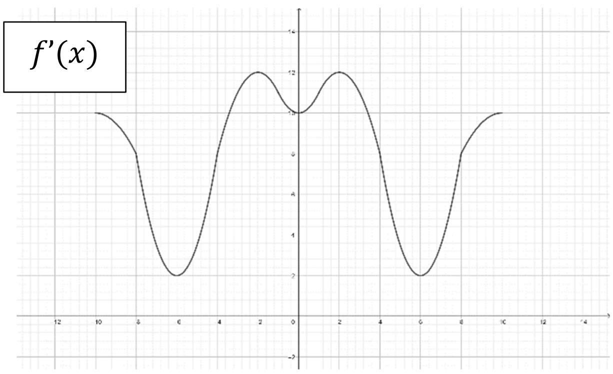
Si consideri ora la funzione $g(x) = f(x)^{\frac{3}{2}}$.

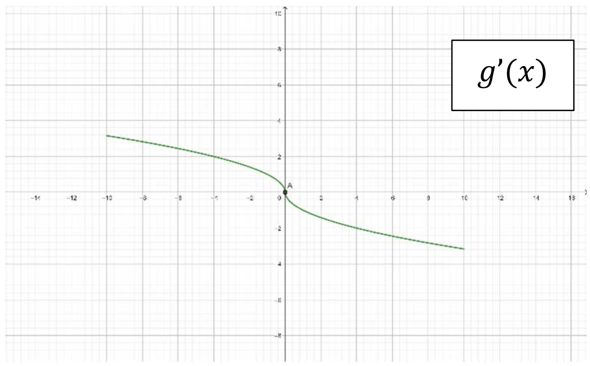
4. Si studi e si rappresenti nel piano cartesiano la funzione $g(x)$ e si calcoli il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare $g(x)$ di 360° attorno all'asse delle x, con $3 \leq x \leq 4$.

5. Si calcoli il valor medio della funzione $h(x) = g^2(x)$ e se ne determini il dominio (ignorando le limitazioni del dominio di g) in $[0; 2]$ e l'ascissa in cui la funzione assume tale valore.

QUESITI

1. Le due funzioni rappresentate nelle figure qui sotto, entrambe definite in $[-10;\ 10]$, sono le derivate di due funzioni f e g definite sullo stesso intervallo. Si stabilisca, giustificando adeguatamente le risposte, qual è il massimo numero di soluzioni che può ammettere $f(x) = 0$ e qual è il numero massimo di soluzioni che può ammettere l'equazione $g(x) = 0$.





2. A un triangolo rettangolo di ipotenusa 3 m viene fatta compiere una rotazione completa intorno a un suo cateto. Si determini il volume massimo del cono che viene generato.

3. Si determini un polinomio $P(x)$ di terzo grado che ammetta $x = 0$ e $x = 1$ come radici, che abbia un punto di estremo relativo in $x = 0$ e sapendo che l'area sottesa dalla curva definita da $y = P(x)$, calcolata fra 0 e 1, vale $\frac{1}{6}$.

4. Si consideri un dado regolare a 20 facce.

A. Se si eseguono 8 lanci, qual è la probabilità che esca il 5 almeno 3 volte?

B. Quante volte bisogna lanciarlo perché la probabilità che non esca mai il 3 sia minore dello 0,1%?

5. Si determini il piano tangente alla sfera $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0$ nel suo punto di intersezione di ascissa 1 con la retta r: $\begin{cases} x=4+3k \\ y=2 \\ z=-1-3k \end{cases}$

6. Si esponga la regola del marchese de L'Hôspital (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2022}}{2^x}=0$$

7. Si calcoli il volume del solido avente come base il segmento parabolico limitato dall'asse x e dalla parabola di equazione $y=4-x^2$, le cui sezioni ottenute con piani perpendicolari all'asse x sono triangoli equilateri.

8. Si risolva la seguente equazione:

$$6\left[\binom{x}{2}+\binom{x}{3}\right]=x(x+11)$$