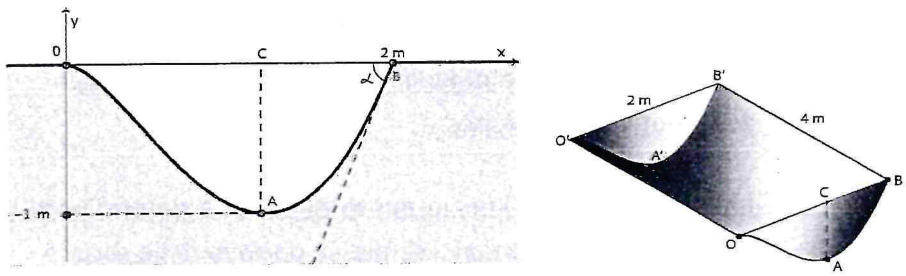
SAVOIA BENINCASA	ESAME DI STATO 2022 SECONDA PROVA SCRITTA Tema di: **MATEMATICA** *Traccia C*	Data	23 giugno 2022
		Classe	
		Alunno	

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 degli 8 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1 – La vasca per i pesci rossi

Il comune decide di costruire nel parco pubblico una vasca per i pesci rossi. La vasca dovrebbe avere la forma mostrata in figura, con una profondità massima di 1m, larghezza di 2 m e lunghezza di 4m. Le sezioni OAB e $O'A'B'$ della vasca sono congruenti.



Una volta scavata la vasca, il profilo del terreno può essere ben modellizzato dal grafico di una funzione del tipo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ ax^2 ln(b\,x) & 0 < x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases} \qquad \text{con } a > 0 \text{ e } b > 0$$

a) Determinare i valori di a e b in base alle informazioni date.

b) Verificato che $a = \frac{e}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$, studiare la continuità e la derivabilità della funzione $f(x)$ e determinare l'angolo α che la parete della vasca forma con l'asse delle x nel punto B.

c) L'architetto responsabile per il progetto decide di dividere la vasca con una parete verticale $ACC'A'$ come mostrato in **Figura 2**, e di riempire la parte sinistra della vasca con ghiaia, lasciando la parte destra per l'acqua. Per la sopravvivenza dei pesci è necessario che il volume di acqua sia maggiore di 1,5 m^3. Osservando che l'area della sezione ABC della vasca è maggiore dell'area di un opportuno triangolo, verificare che questa condizione è soddisfatta. Determinare poi il valore esatto del volume di acqua mostrando i passaggi necessari.

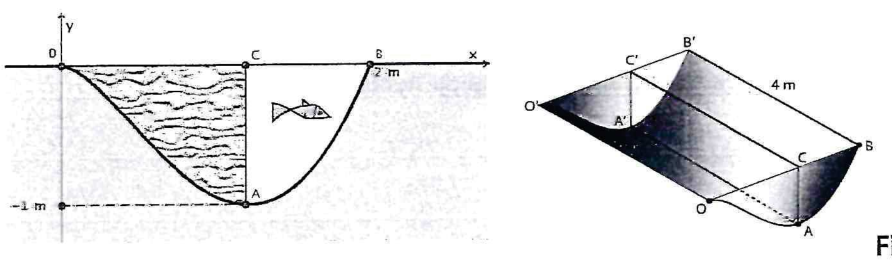


Figura 2

d) L'arco $\widehat{OAB}$ della vasca può essere ben modellizzato anche tramite una funzione del tipo

$$g(x) = p\,x^2(x - q), \qquad 0 \leq x \leq 2$$

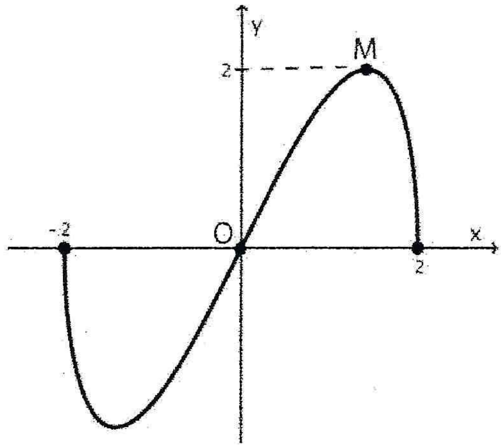
Dimostrare che $p = \frac{27}{32}$ e $q = 2$ e determinare le ascisse del punto di minimo e del punto di flesso di questa funzione.

PROBLEMA 2 – La funzione irrazionale

In figura è disegnato il grafico della funzione

$y = f(x) = h \cdot x \cdot \sqrt{k - x^2}$ con $h \neq 0$ e $k > 0$

dove h e k sono parametri reali.



a) Determinare i valori di h e k, sapendo A (2, 0) è uno zero della funzione e che il punto di massimo M ha ordinata 2.

b) Verificato che $k = 4$ e $h = 1$, determinare e classificare i punti di non derivabilità della funzione e spiegare se è applicabile il teorema di Rolle alla funzione nell'intervallo [-2; 2] motivando la risposta.

c) Dimostrare che O è l'unico punto di flesso e determinare l'angolo in gradi che la tangente nel punto di flesso forma con il semiasse positivo delle ascisse.

d) Determinare l'area della regione di piano delimitata dalla curva e dall'asse x mostrando il procedimento seguito.

QUESTIONARIO

1. Data la superficie sferica Γ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ e la retta r di equazione:

$$r: \begin{cases} x = 3t \\ y = 0 \\ z = -3t + 2 \end{cases}, \qquad \text{con } t \in \mathbb{R},$$

siano A e B i punti di intersezione tra Γ e la retta r. Determinare l'equazione del piano contenente i punti A, B e C, dove C è il centro della superficie sferica.

2. Calcolare il seguente limite, mostrando i passaggi necessari:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^2}$$

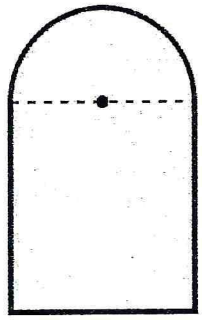
3. Determinare il valore di k in modo che il valor medio della funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{x} + \ln x$$

nell'intervallo [1; k], con $k > 1$, sia 2.

4. E' data la funzione $f(x) = e^{2x} - |e^{2x} - 1|$. Indicare un intervallo in cui siano applicabili entrambi i teoremi di Rolle e Lagrange e un intervallo in cui nessuno dei due teoremi sia applicabile, motivando le risposte. Verificare quindi che nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ è applicabile solo uno dei due teoremi, motivando esaurientemente la risposta.

5. Dopo aver determinato i massimi e/o minimi relativi della funzione $y = x^2 \cdot e^{-x}$, mostrare che tale funzione non ammette massimo assoluto.



6. In una parete deve essere ricavata una finestra mistilinea a forma rettangolare con una semicirconferenza di diametro coincidente con la base superiore, come mostrato in figura. Determinare quale deve essere la base della finestra di massima superficie realizzabile con un profilo lungo 4 metri.

7. Mattia ha detto ai suoi amici che se ottiene la sufficienza nella verifica di matematica, la probabilità che i suoi genitori gli acquistino il motorino è del 90%, mentre se non avrà la sufficienza, tale probabilità scende al 10%, ma purtroppo non è riuscito a prepararsi bene e la probabilità che abbia la sufficienza è del 30%. Visto che oggi Mattia è arrivato a scuola con il motorino, qual è la probabilità che la sua verifica di matematica sia insufficiente? Argomentare esaurientemente la risposta mostrando il procedimento seguito.

8. Nella totalità delle funzioni $f(x)$ tali che:

$$f'(x) = \frac{a\,x^2 + 1}{x}$$

ve ne è una che ha un punto di flesso nel punto A $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Determinare tale funzione mostrando il procedimento seguito.

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici scientifiche e grafiche non programmabili.
Non è consentito uscire dall'aula prima che siano trascorse tre ore dalla distribuzione del tema.