ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02 SCIENTIFICO LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

23/06/2022

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a quattro quesiti

PROBLEMA 1

Sia data la funzione $f(x) = (x+a)\sqrt{b-x^2}$.

a) Determinare i valori dei parametri reali a e b in modo tale che la retta $y = 2x$ sia tangente al grafico di f nell'origine degli assi.

b) Indipendentemente dai valori trovati nel punto precedente, assumere, da ora in avanti, i seguenti valori per i parametri $a = 0$ e $b = 4$. Effettuare lo studio completo della funzione f e tracciarne il grafico.

c) Calcolare l'area della regione finita di piano R nel primo quadrante delimitata dal grafico di f e dall'asse x e il volume del solido S generato dalla rotazione completa di R intorno all'asse x.

d) Iscrivere in S un cono circolare retto con vertice nell'origine e determinare raggio e altezza del cono, affinché il suo volume sia massimo.

PROBLEMA 2

Sia data la famiglia di funzioni $f(x) = axe^{-bx^2}$ con $a,\ b \in \mathbb{R}$.

a) Determinare i valori dei parametri reali a e b in modo che $f(x)$ abbia un massimo relativo per $x = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$ e che risulti $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{e^3-1}{3e^3}$.

b) Avendo dimostrato che i valori di a e b di cui al punto precedente sono $a = 2$ e $b = 3$, sia $f(x)$ la funzione corrispondente a tali valori: se ne studi la rappresentazione grafica.

c) Calcolare $A(k) = \displaystyle\int_0^k f(x)dx$ e ricavare, se esiste, il $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} A(k)$. Cosa rappresenta in termini geometrici il risultato di questo limite?

d) Sia P un punto del grafico di $f(x)$ appartenente al primo quadrante e siano Q e R le sue proiezioni sugli assi x e y, rispettivamente. Ricavare P in modo che sia massima l'area del rettangolo $PQOR$.

QUESITI

1. Scrivere l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $P(1, 2, -1)$ e perpendicolare al vettore $\overrightarrow{v}(2, -1, 4)$. Stabilire se tale piano è perpendicolare alla retta di equazioni

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

2. Si dica quale delle due funzioni $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ e $g(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ non verifica nell'intervallo $[-1; 1]$ tutte le ipotesi del teorema di Lagrange e si giustifichi l'affermazione. Si determinino per l'altra funzione i valori della variabile indipendente la cui esistenza è assicurata dal teorema.

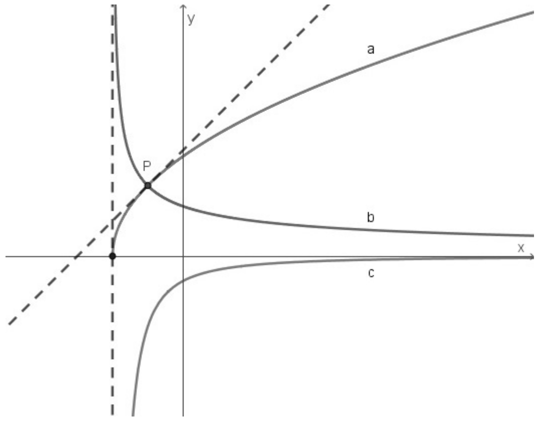
3. Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{5x^3}$

4. Calcolare il seguente limite in due modi diversi

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin x}{3x + \sin x}$$

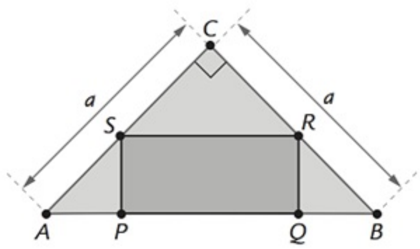
5. In figura sono disegnati i grafici di una funzione $f(x)$ e delle sue derivate $f'(x)$ e $f''(x)$. Due di essi si incontrano nel punto P, nel quale è stata tracciata la retta tangente t ad uno dei grafici.

   - Associa ad ogni funzione il rispettivo grafico, motivando la risposta.
   - Sapendo che $f'(x) = \frac{1}{f(x)}$, determina l'ordinata di P e il coefficiente angolare della retta tangente t.



6. Il rettangolo $PQRS$ in figura è inscritto nel triangolo rettangolo isoscele ABC , in cui i cateti misurano a.

   Stabilisci se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando adeguatamente la risposta: "Il cilindro che si ottiene da una rotazione completa del rettangolo $PQRS$ intorno ad AB ha volume massimo quando il rettangolo $PQRS$ ha area massima".



7. Considerare il luogo geometrico dei punti di un piano cartesiano che soddisfano l'equazione

$$y = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - x^2}$$

   Stabilire, fornendo una esauriente spiegazione della risposta, quale delle seguenti alternative è quella corretta. Il luogo è costituito da

   a) un punto;
   b) due punti;
   c) infiniti punti;
   d) nessun punto.

8. Sia dato un trapezio isoscele in cui il rapporto tra la base maggiore e la base minore è 7. Stabilire, fornendo un'ampia spiegazione, se si può determinare il rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo, dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02 SCIENTIFICO LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

23/06/2022

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a quattro quesiti

PROBLEMA 1

Data la curva G di equazione $y = \dfrac{hx^3}{kx^2 - 1}$, con h e k coefficienti reali non nulli.

a) Determinare i valori dei parametri reali h e k in modo che la curva abbia come asintoto obliquo la retta $x = 2y$ e un punto stazionario di ascissa $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

b) Si ponga $h = 1$ e $k = 2$ e si tracci il grafico della curva G per tali valori dei parametri.

c) Presi sulla curva i punti P e Q di rispettive ascisse $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, determinare i punti dell'arco PQ in cui la tangente a G è parallela alla retta PQ.

d) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{1}{2}x - f(x)\right) dx$. Cosa rappresenta in termini geometrici il risultato di questo integrale?

PROBLEMA 2

Sia data la funzione

$$f(x) = (x + a)e^{bx}$$

a) Determinare i valori dei parametri reali a e b in modo tale che la retta $4x - 2y - 1 = 0$ sia tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa 0.

b) Indipendentemente dai valori trovati nel punto precedente, assumere, da ora in avanti, i seguenti valori per i parametri $a = -2$ e $b = 1$. Studiare e rappresentare il grafico della funzione $f(x)$.

c) Determinare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico di $f(x)$ e dagli assi cartesiani.

d) Considerare un triangolo OBC in cui O è l'origine degli assi cartesiani, B è il punto del grafico della funzione $f(x)$ di ascissa k con $k \in [0; 2]$, e C è la proiezione del punto B sull'asse x. Determinare il valore di k per cui l'area del triangolo OBC è massima.

QUESITI

1. Scrivere l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $P(-1, -2, 2)$ e perpendicolare al vettore $\overrightarrow{v}(1, -2, 5)$. Stabilire se tale piano è perpendicolare alla retta di equazioni

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

2. Si dica quale delle due funzioni $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ e $g(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ non verifica nell'intervallo $[-1; 1]$ tutte le ipotesi del teorema di Lagrange e si giustifichi l'affermazione. Si determinino per l'altra funzione i valori della variabile indipendente la cui esistenza è assicurata dal teorema.

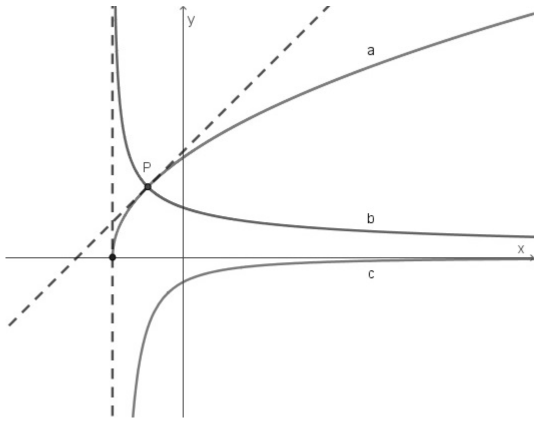
3. Data la funzione $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{1+t^3}$ con $x \in [1; +\infty[$, si stabilisca, motivando la risposta, se è crescente nel suo dominio. Si determini l'equazione dell'eventuale tangente destra nel punto di ascissa $x = 1$.

4. Calcolare il seguente limite in due modi diversi

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 1 - \cos x}{\sin^2 x + x^2}$$

5. In figura sono disegnati i grafici di una funzione $f(x)$ e delle sue derivate $f'(x)$ e $f''(x)$. Due di essi si incontrano nel punto P, nel quale è stata tracciata la retta tangente t ad uno dei grafici.

   - Associa ad ogni funzione il rispettivo grafico, motivando la risposta.
   - Sapendo che $f'(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, determina l'ordinata di P e il coefficiente angolare della retta tangente t.



6. Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:
   a) area massima e perimetro massimo;
   b) area massima e perimetro minimo;
   c) area minima e perimetro massimo;
   d) area minima e perimetro minimo;

7. Considerare il luogo geometrico dei punti di un piano cartesiano che soddisfano l'equazione

$$y = \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{9 - x^2}$$

   Stabilire, fornendo una esauriente spiegazione della risposta, quale delle seguenti alternative è quella corretta. Il luogo è costituito da
   a) un punto;
   b) due punti;
   c) infiniti punti;
   d) nessun punto.

8. Sia dato un trapezio isoscele in cui il rapporto tra la base maggiore e la base minore è 7. Stabilire, fornendo un'ampia spiegazione, se si può determinare il rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo, dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

<u>ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE</u>

Indirizzi: LI02 SCIENTIFICO LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

23/06/2022

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a quattro quesiti

PROBLEMA 1

Sia data la funzione

$$f(x) = (x + a)e^{bx}$$

a) Determinare i valori dei parametri reali a e b in modo tale che la retta $4x - 2y - 1 = 0$ sia tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa 0.

b) Indipendentemente dai valori trovati nel punto precedente, assumere, da ora in avanti, i seguenti valori per i parametri $a = -2$ e $b = 1$. Studiare e rappresentare il grafico della funzione $f(x)$.

c) Determinare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico di $f(x)$ e dagli assi cartesiani.

d) Considerare un triangolo OBC in cui O è l'origine degli assi cartesiani, B è il punto del grafico della funzione $f(x)$ di ascissa k con $k \in [0; 2]$, e C è la proiezione del punto B sull'asse x. Determinare il valore di k per cui l'area del triangolo OBC è massima.

PROBLEMA 2

Sia data la funzione $f(x) = (x + a)\sqrt{b - x^2}$.

a) Determinare i valori dei parametri reali a e b in modo tale che la retta $y = 2x$ sia tangente al grafico di f nell'origine degli assi.

b) Indipendentemente dai valori trovati nel punto precedente, assumere, da ora in avanti, i seguenti valori per i parametri $a = 0$ e $b = 4$. Effettuare lo studio completo della funzione f e tracciarne il grafico.

c) Calcolare l'area della regione finita di piano R nel primo quadrante delimitata dal grafico di f e dall'asse x e il volume del solido S generato dalla rotazione completa di R intorno all'asse x.

d) Iscrivere in S un cono circolare retto con vertice nell'origine e determinare raggio e altezza del cono, affinché il suo volume sia massimo.

QUESITI

1. Scrivere l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $P(1, 2, -1)$ e perpendicolare al vettore $\vec{v}(2, -1, 4)$. Stabilire se tale piano è perpendicolare alla retta di equazioni

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

2. Si dica quale delle due funzioni $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ e $g(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ non verifica nell'intervallo $[-1; 1]$ tutte le ipotesi del teorema di Lagrange e si giustifichi l'affermazione. Si determinino per l'altra funzione i valori della variabile indipendente la cui esistenza è assicurata dal teorema.

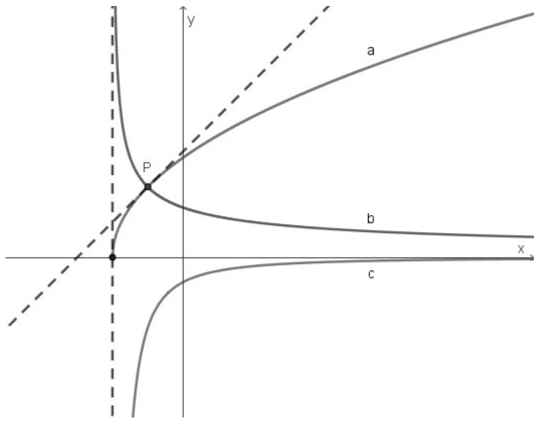
3. Trovare gli intervalli in cui la funzione $f(x) = -\ln^2 x + \int_1^x \ln t \, dt$ è crescente.

4. Calcolare il seguente limite in due modi diversi

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + \sin x}{1 - \cos x - \sin x}$$

5. In figura sono disegnati i grafici di una funzione $f(x)$ e delle sue derivate $f'(x)$ e $f''(x)$. Due di essi si incontrano nel punto P, nel quale è stata tracciata la retta tangente t ad uno dei grafici.

   - Associa ad ogni funzione il rispettivo grafico, motivando la risposta.
   - Sapendo che $f'(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, determina l'ordinata di P e il coefficiente angolare della retta tangente t.



6. Tra tutti i parallelepipedi retti di base quadrata e di volume 1, determinare quello con superficie totale minima.

7. Considerare il luogo geometrico dei punti di un piano cartesiano che soddisfano l'equazione

$$y = \sqrt{x^2 - 25} + \sqrt{25 - x^2}$$

Stabilire, fornendo una esauriente spiegazione della risposta, quale delle seguenti alternative è quella corretta. Il luogo è costituito da

   a) un punto;
   b) due punti;
   c) infiniti punti;
   d) nessun punto.

8. Sia dato un trapezio isoscele in cui il rapporto tra la base maggiore e la base minore è 7. Stabilire, fornendo un'ampia spiegazione, se si può determinare il rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo, dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.