GALILEO GALILEI

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei problemi e quattro dei quesiti seguenti.

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione f definita da $$f(x)=\frac{x+1}{e^{3x}}$$

a) Si studi f e se ne tracci il grafico Υ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy. Si scriva l'equazione della tangente a Υ nel punto di flesso e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con gli assi cartesiani.

b) Si deduca da Υ il grafico della $g(x)=|f(x)|$ motivando in modo esauriente, e si studi la continuità e derivabilità della funzione g(x)

c) Si consideri la funzione $F(x) = \ln[f(x)]$ e, senza farne lo studio, se ne tracci un grafico qualitativo, individuando il dominio, il numero delle intersezioni con l'asse delle ascisse (chiamarle x_i qualora non siano calcolabili algebricamente), l'insieme di positività della funzione e gli intervalli di monotonia, motivando in modo chiaro le deduzioni fatte.

d) Si calcoli l'area A(k) della superficie piana, delimitata dalla curva Υ, dall'asse x e dalle rette x= -3 e x= k con k>0 e si calcoli il limite di A(k) quando k→+∞.

PROBLEMA 2

E' data la funzione di variabile reale $f(x) = (x-2)e^x$
Sia Γ la curva che rappresenta la funzione $f(x)$ nel sistema di riferimento ortogonale xOy.

a) Si studi la funzione e se ne rappresenti il grafico Γ. A partire dal grafico della funzione $f(x)$, si deduca il grafico delle funzioni $f'(x)$ e $f''(x)$, argomentando opportunamente le scelte effettuate.

b) Dopo aver verificato che la funzione ammette un solo punto di flesso, si determini l'equazione della tangente inflessionale t e si individuino i punti E e Fdi intersezione con gli assi x e y rispettivamente.

c) Si calcoli la primitiva della funzione *f(x)* passante per il punto P(3:0). Si determini, infine, l'area compresa tra t e la curva Γ nell'intervallo che ha per estremi le ascisse dei punti E e F.

d) Si individui, argomentando adeguatamente la strategia adottata, l'espressione della derivata di ordine n $f^{(n)}(x)$.

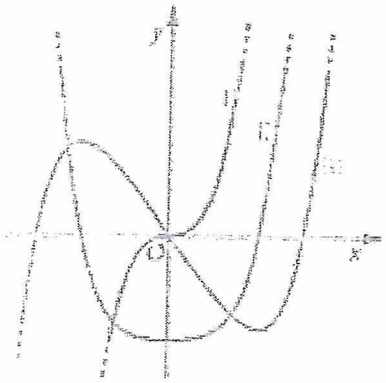
QUESITI

1. Siano $f(x) = (1 - a^2)x^2 + 4x + 4$ e $g(x) = ax^2 - 2x - 4a + 4$.

a. Si determini per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ risulta: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

b. Si determini per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ risulta finito.

2. Nella figura, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della sua derivata f' e l'altro ancora di f''. Si scelga quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici. Si motivi la risposta spiegando per ogni alternativa proposta il ragionamento eseguito.



	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

3. Si dimostri che la funzione $f(x) = x - e^{-x^2+1}$ ammette uno zero nell'intervallo [0,2]. Si enunci il teorema utilizzato per la dimostrazione e si risolva il problema anche graficamente.

4. Data la funzione $f(x) = arcsin\sqrt{x} + arcsin\sqrt{1-x}$, se ne individui il dominio. Si dimostri che essa è costante nel dominio, si determini il valore di tale costante e di rappresenti il grafico di $y=f(x)$.

5. Siano note: $\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ e $\frac{dg(x)}{dx} = 4x - 4$. Si ricavi l'area compresa tra le curve y = f(x) e y = g(x), sapendo che il punto A(2; 4) è una intersezione tra dette due curve.

6. Sia f una funzione continua nell'intervallo I=[1,3], derivabile nei punti interni a I e tale che f(1)=2 e f(3) = 10.

a) Si dimostri che esiste almeno un punto c interno a I in cui f'(c) =4.

b) Si enunci il teorema utilizzato per la dimostrazione.

7. Si determini per quali valori di h e k la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{k\sqrt{x}+h}{5-x^2}$ nel punto $x_0 = 1$ ha equazione $x - 4y - 5 = 0$.

8. Si consideri la funzione $f(x) = \int_x^{2x} te^{\sqrt{t}}dt$ con $x \geq 0$.
Senza determinare esplicitamente la sua espressione analitica, si calcoli la derivata prima della funzione
Si calcoli $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.