SECONDA PROVA DI MATEMATICA DELL’ESAME DI STATO

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario specificando qui sotto quali sono quelli scelti

Problema n°______	***Quesito n°______***	***Quesito n°______***	***Quesito n°______***	***Quesito n°______***

Problema 1

Considera le curve di equazione:

$$f(x) = e^{\frac{x^2+ax}{x^2+a}} \text{, con } a > 0.$$

1. Verifica che tutte le funzioni sono tangenti nel punto $(0,1)$ alla stessa retta t e determinane l’equazione. Scelti arbitrariamente due valori del parametro a, determina le coordinate dei punti A e B (con $x_A < x_B$) per i quali passano tutte le curve del fascio.

2. Determina il valore del parametro a per il quale la funzione ha un punto stazionario in $x = 3$. <u>Assumi d’ora in avanti di avere $a = 3$</u>; studia la funzione corrispondente fino alla derivata prima e tracciane il grafico. Osservando il grafico, quanti potrebbero essere i punti di flesso per la funzione? Motiva la risposta.

3. Studia la funzione $g(x) = ln(f(x))$ e tracciane il grafico.

4. Verifica che $g(x) \geq x$ per $x \leq 1$. Calcola l’area della regione finita di piano delimitata dal grafico di g e dalla retta r tangente al suo grafico in $x = 0$.

Problema 2

Sia *f* la funzione definita da $y = (4x - 2)e^{2x}$.

1. Dimostra che la funzione possiede un unico punto di minimo e un unico punto di flesso. Calcola le coordinate del minimo e del flesso e traccia il grafico G_f della funzione.

2. Dimostra che la funzione *g(x)*= $(-4x - 2)e^{-2x}$ è simmetrica di f rispetto all’asse y e tracciane il grafico G_g.

3. Detti P e Q i punti di intersezione rispettivamente del grafico G_f e del grafico G_g con l’asse x, determina l’area A della porzione di piano delimitata dal segmento PQ e dai grafici G_f e G_g.

4. Sia f_a la famiglia di funzioni definite da f_a(x)= $(2ax - 2)e^{ax}$, con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Per ogni funzione f_a la tangente al grafico nel punto di flesso interseca l’asse x e l’asse y delimitando un triangolo rettangolo. Determina i valori di *a* per i quali tale triangolo è anche isoscele, motivando il procedimento seguito.

Quesiti

1. Considera la funzione $f(x) = \int_0^x (at^2 + t)\,dt, con\ a \neq 0$.
   a. Calcola il valore della costante reale a tale per cui $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{axsenx} = \frac{1}{4}$.

   b. Assegnato ad a il valore 2, determina i massimi e i minimi di $f(x)$.

2. Sull'arco di equazione $y = -\sqrt{1 - x^2}$ considera il punto Q di ascissa k. Determina k in modo che la somma dei quadrati delle distanze di Q da $A(0; -3)$ e da $B(3; 0)$ sia minima.

3. Servendoti della definizione, calcola la derivata della funzione $y = \sqrt{x^2 + 2}$

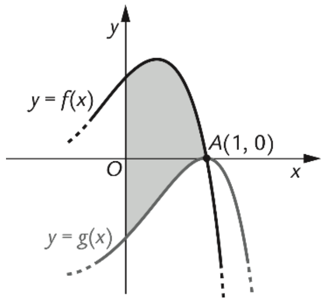
4. Stabilisci se i seguenti integrali sono convergenti o divergenti:

   a. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$

   b. $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} dx$

5. Stabilisci per quale valore dei parametri reali a, b la funzione

   $f(x) = \begin{cases} \frac{bx+4}{x-1} & se \quad x > 2 \\ ax^2 + 2\text{x} & se \ x \leq 2 \end{cases}$ soddisfa il teorema di Lagrange nell'intervallo $\left[\frac{3}{2}; 3\right]$.
   Determina l'ascissa del punto che verifica la tesi del teorema con x>2.



6. La figura mostra le curve di equazione $f(x) = (1 - x^2)e^x$ e $g(x)$, che è una primitiva di f. Individua l'espressione analitica di g e calcola l'area della porzione di piano colorata.

7. Dopo aver disegnato il grafico di y=ln(x+1), calcola il volume del solido generato da una rotazione completa, intorno all'asse x dell'arco di curva delimitato dai punti di ascissa x=0 e x=3.

8. Determina gli asintoti della seguente funzione definita per casi:
   $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x-1}} & se \quad x \geq 1 \\ \frac{x}{e^x - 1} & se \ x < 1 \end{cases}$.

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito l'uso delle calcolatrici scientifiche e/o grafiche elencate in allegato alla nota del MIUR - Direzione generale per gli ordinamenti scolastici e la valutazione del s.n.i. 30 marzo 2018, n. 5641, aggiornata con nota del MIUR - Direzione generale per gli ordinamenti scolastici e la valutazione del s.n.i. 30 ottobre 2019, n. 22274.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla somministrazione della prova.