Liceo Scientifico "Galileo Galilei" - Macerata

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva <u>uno dei due</u> problemi e risponda a <u>quattro</u> quesiti.

Il candidato indichi il numero del problema e dei quesiti scelti per la correzione

Problema ………	Quesito ……….	Quesito ……….	Quesito ……….	Quesito ……….

Problema 1.

Si considerino le seguenti funzioni

$$y = f(x) = \frac{-2x^3 + 6x^2}{3}, \qquad y = g(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3}$$

1. Disegnare i rispettivi grafici in un sistema di riferimento di assi cartesiani Oxy.
2. Verificare che, oltre al punto O, tali grafici hanno in comune un altro punto A; determinare sul segmento OA un punto P tale che, condotta per esso la retta parallela all'asse y, sia massima la lunghezza del segmento RS, dove R ed S sono i punti in cui la retta interseca i due grafici suddetti.
3. Determinare le coordinate dei punti di ascisse uguali in cui le due curve hanno tangenti parallele e verificare che, oltre al punto A, si ritrovano i punti R ed S.
4. Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.

Problema 2.

In un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali Oxy si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln|x| - 2x & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

1. Trovare a in modo tale che la funzione sia continua $\forall x \in R$
2. Stabilito che questo si verifica per a = 0, tracciare il grafico sfruttando eventuali simmetrie
3. Determinare e classificare gli eventuali punti di non derivabilità e scrivere le equazioni delle rette tangenti nei punti di intersezione con gli assi cartesiani.
4. Determinare la misura della superficie S della porzione limitata di piano compresa tra la curva, l'asse x e le rette di equazione $x = e^2$ e $x = k$, con $0 < k < e^2$. Calcolare poi $\lim_{k \to 0} S$.

Quesito 1

Determinare per quali valori dei parametri reali non nulli a e b valgono contemporaneamente le seguenti uguaglianze:

$$\int_{-1}^{0} \frac{ax-b}{1+x^2}\,dx = -\frac{\ln 2}{2} \qquad \text{e} \qquad \int_{0}^{1} \frac{ax-b}{1+x^2}\,dx = 0$$

Quesito 2

Calcolare, se esiste, il limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4x + \int_0^{2x^2} \cos(t)dt}{\ln(x+1)}$$

Quesito 3

Sia $y = f(x)$ una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. È noto il valore dell'integrale $\int_0^3 f(x)dx$. Individuare, fornendo un'esauriente spiegazione della scelta effettuata, quale/i dei seguenti integrali è possibile calcolare:

$$\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx; \qquad \int_0^3 f(3x)dx; \qquad \int_0^1 f\left(\frac{x}{3}\right) dx; \qquad \int_0^1 f(3x)dx.$$

Quesito 4

In un sistema di riferimento cartesiano monometrico xOy, considerare la parabola di equazione

$$y = x^2 - 4x + 4$$

che interseca gli assi cartesiani nei punti *A* e *B*. Tracciare la retta tangente in un qualunque punto dell'arco *AB* e, considerato il triangolo che tale retta forma con gli assi cartesiani, trovare il volume massimo del solido che il triangolo genera in una rotazione completa attorno all'asse *x*.

Quesito 5

Dopo aver enunciato il Teorema di Rolle, stabilire se è applicabile alla funzione

$$f(x) = \ln^2(x) - 2\ln(x)$$

nell'intervallo $[e^{-1}, e^3]$ e determinare gli eventuali punti di cui il teorema garantisce l'esistenza.

Quesito 6

Considerare la funzione

$$f(x) = xe^{-x}.$$

Determinare il suo valore medio M nell'intervallo $[0; 4]$ e spiegare il suo significato geometrico.

Quesito 7

Data la funzione:

$$y = \begin{cases} ax + b & x \leq 1 \\ x^3 + cx & x > 1 \end{cases}$$

trovare a, b, c in modo che sia continua e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ e abbia nel punto di ascissa 2 tangente parallela alla retta di equazione $y = 5x - 1$.

Quesito 8

In figura è rappresentato il grafico della derivata prima della funzione f(x). La funzione f(x) è definita e continua nell'intervallo $[-2;4]$. Dedurre quali punti di non derivabilità potrebbe presentare la funzione f(x) per $x=0$ e per $x=3$, motivando la risposta.