LICEO STATALE "ENRICO MEDI"

SESSIONE ORDINARIA ESAME DI STATO 2022

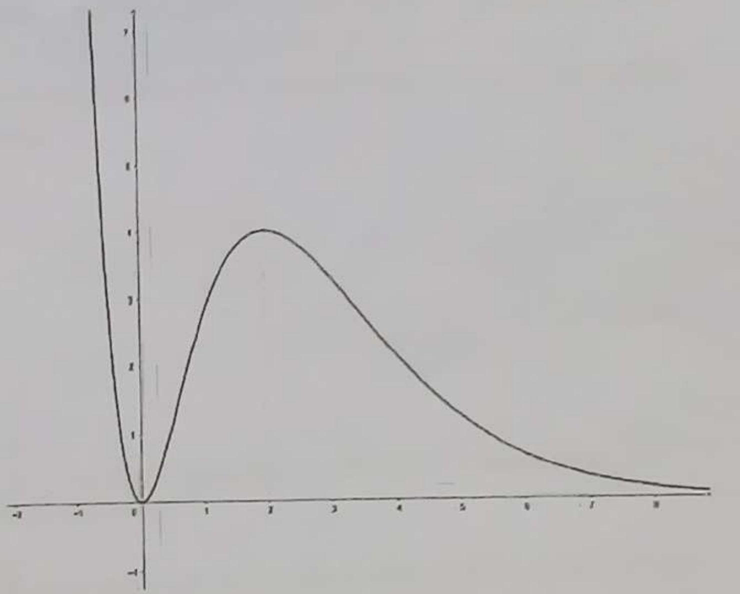
Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA SCELTO				
QUESITI SCELTI				

PROBLEMA 1

In figura è rappresentato il grafico di una funzione del tipo

$$f(x) = x^2 \cdot e^{ax+b}.$$



I. In base alle informazioni che si possono ricavare dal grafico, determinare i valori dei parametri a e b reali non nulli. Dopo aver verificato che $a = -1$ e $b = 2$, determinare i punti di flesso della funzione.

II. Dedurre, dal grafico di $f(x)$, un grafico qualitativo di $f'(x)$ spiegando il suo legame con il grafico della funzione $f(x)$.

III. Sia $G(x) = \int_2^x f(t)dt$. Spiegare che tipo di punto presenta $G(x)$ in $x = 0$ e calcolare $G(0)$.

IV. Sia P un punto della curva di ascissa positiva e sia Q la sua proiezione sull'asse delle ascisse. Determinare le coordinate di P in modo che sia massima l'area del triangolo POQ.

PROBLEMA 2

Assegnato un numero reale positivo k, considerare le funzioni f e g così definite:

$$f(x) = \sqrt{x}(k-x) \quad , \qquad g(x) = x^2(x-k)$$

I. Dimostrare che, qualunque sia $k > 0$, nell'intervallo $[0; k]$ il grafico di f ha un unico punto di massimo $F(x_F; y_F)$ e il grafico di g ha un unico di minimo $G(x_G; y_G)$. Verificare che $x_G = 2x_F$ e $y_G = -(y_F)^2$.

II. Verificare che, qualunque sia $k > 0$, i grafici delle due funzioni sono ortogonali nell'origine, ovvero che le rispettive rette tangenti in tale punto sono tra loro ortogonali. Determina per quale valore positivo di k i due grafici si intersecano ortogonalmente anche nel loro ulteriore punto comune. Assumere, d'ora in avanti, $k = 3$.

III. Studiare le due funzioni e rappresentare i loro grafici. Determinare l'area della parte finita di piano compresa tra i due grafici.

IV. Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{\int_0^{2x} g(t)dt}\,.$$

QUESITI

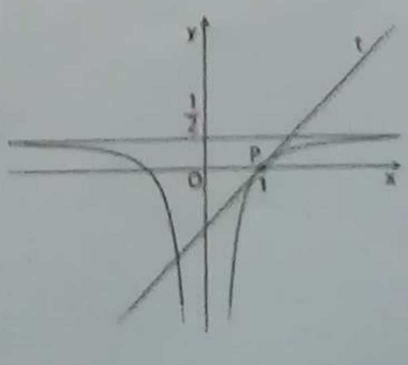
1. Data la funzione $f(x)=3+x^3+\ln x$, provare che è invertibile e, detta $g(x)$ la sua inversa, calcolare $g'(4)$ enunciando il teorema utilizzato.

2. Data la funzione $f(x) = a\sqrt{x^2+9}$, determina per quale valore della costante reale positiva a, i solidi ottenuti ruotando di 360° il sottografico di $f(x)$ compreso tra le ascisse $x = 0$ e $x = 4$ prima intorno all'asse x poi intorno all'asse y risultano equivalenti.

3. Determinare k in modo che il valore medio (integrale) di $f(x) = x^3$ in $[0; k]$ sia 27/4. In corrispondenza del valore di k trovato, stabilire se è possibile applicare il teorema di Lagrange alla funzione

$$g(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le k \\ 18x - 3x^2 & k < x \le 6 \end{cases} \quad \text{nell'intervallo } [0; \overset{6}{\cancel{k}}].$$

4. Il grafico a lato rappresenta una funzione algebrica razionale fratta del tipo $f(x)=P(x)/x^2$ dove $P(x)$ è un polinomio. Sapendo che il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse y, che la retta $y=1/2$ è un asintoto orizzontale completo (destro e sinistro) e che la retta t forma un angolo di 45° con l'asse delle ascisse, determina l'espressione della funzione.



5. Sia *f(x)* una funzione continua in R. Se $\int_2^4 f(x)dx = 3$, f(2)=1 e f(4)=2 calcolare, se possibile, i seguenti integrali:

a) $\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$, b) $\int_4^8 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$, c) $\int_2^4 x f'(x)\, dx$

6. Tra le sfere di centro C(1; 2; -1) determina quella tangente al piano π di equazione:

$x - 2y - 2z = 8$ e trova le coordinate del punto T di tangenza.

7. Considerare la funzione $f(x) = e^{-x}$ e la regione di piano limitata dal suo grafico, dall'asse x e dalle rette di equazione $x = k$ e $x = 2k$, con k numero reale positivo. Esprimere, in funzione di k, il volume del solido che si ottiene ruotando tale regione di un giro completo attorno all'asse x. Per quale valore di *k* si ottiene il volume massimo?

8. La figura rappresenta il grafico della funzione continua *f(x)*, la retta t tangente in A al grafico di *f(x)* e la retta *s* tangente destra in C al grafico di *f(x)*. Determina i valori dei parametri reali a, b, c e d in modo che l'espressione della funzione sia:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 & x < 1 \\ cx^2 + dx + 1 & x \geq 1 \end{cases} .$$

e verifica che C è un punto angoloso. Determina quindi l'angolo ottuso formato dalle due rette tangenti al grafico di *f(x)* nel punto C.