<u>ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE</u>

Indirizzi: LI02 – SCIENTIFICO

LI03 – SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Considera la famiglia di funzioni $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f_a(x) = \frac{x+a}{1+x^2}$$

dove a è un parametro reale.

a) Dimostra che, per qualsiasi valore di a, il grafico di $f_a(x)$ presenta un punto di massimo relativo, un punto di minimo relativo e un solo asintoto.

b) Dimostra che, per qualsiasi valore di a, la retta tangente al grafico di $f_a(x)$ nel suo punto C di intersezione con l'asse y ha in comune con il grafico di $f_a(x)$ anche l'intersezione D con l'asse x. Determina per quale valore di $a > 0$ il segmento CD misura $2\sqrt{2}$.

c) Indica con $g(x)$ la funzione che si ottiene per il valore $a = 2$ trovato al punto precedente. Studia e rappresenta graficamente la funzione $y = g(x)$, limitandoti allo studio della derivata prima.

d) Trova per quale valore di a nella famiglia delle funzioni $f_a(x)$ si ottiene la funzione $h(x)$ dispari. Considera, infine, la funzione $F(x) = \int_0^x h(t)dt$.

Calcola $F(\sqrt{3})$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{\ln x}$.

PROBLEMA 2

Sia data la funzione $f(x)=(x+a)e^{bx}$.

a) Determina i valori dei parametri reali *a* e *b* in modo tale che la retta di equazione $y=2-x$ sia tangente al grafico di *f* nel suo punto di intersezione con l'asse *y*.

b) Assumi, da ora in avanti, che i parametri *a* e *b* siano quelli che forniscono la soluzione al punto precedente, cioè $a=2$ e $b=-1$. Studia la funzione $y=f(x)$ così ottenuta e tracciane il grafico.

c) Calcola l'area della regione finita di piano del secondo quadrante delimitata dal grafico di *f* e dagli assi cartesiani.

d) Sia *P* un punto del grafico di *f* appartenente al secondo quadrante e sia *H* la proiezione di *P* sull'asse *x*. Indicata con *k* l'ascissa del punto *P*, determina l'espressione della funzione $A(k)$ che esprime l'area del triangolo *OPH*. Stabilisci, infine, per quale valore di *k* si ottiene il triangolo di area massima.

QUESITI

1. Determina per quale valore del parametro reale *a* vale la seguente uguaglianza: $\int_{-1}^{0}\frac{x-a}{1+x^2}dx=\frac{\ln 2}{2}$.

2. Considera la funzione $f_k(x)=x^2\left(k-e^{-x}\right)$, con $k\in\mathbb{R}$. Verifica che la funzione soddisfa l'equazione differenziale $xy'-2y=x^3e^{-x}$, $\forall k\in\mathbb{R}$.

3. Calcola la derivata della funzione $f(x)=x\left|x^2-2x\right|$ individuando, in particolare, i punti in cui essa non è derivabile.

4. Si vuole realizzare un vaso a forma di un parallelepipedo rettangolo a base quadrata (a cui è stata tolta la base superiore). Il volume del suo contenuto deve essere di 1 m^3. Determina la misura in centimetri (approssimando alla seconda cifra decimale) del lato di base di quello che ha la minima superficie totale esterna (cioè l'area delle facce laterali più l'area di base). Considera lo spessore delle facce trascurabile.

5. Considerata la funzione $f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$, dove a è un parametro reale non nullo, determina i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativo e quelli per cui non ammette estremi relativi.

6. Verifica che la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \leq 0 \\ \sin 2x & x > 0 \end{cases}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $\left[-1, \frac{3\pi}{4}\right]$ e determina il punto c interno all'intervallo di cui il teorema assicura l'esistenza.

7. Dimostra che le tangenti al grafico della funzione $y = \dfrac{\frac{1}{2}x + 4}{x^2 + 1}$ nei punti di ascissa 0 e 1 sono perpendicolari tra loro.

8. Calcola il $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x + 1 - \sin 3x - \cos x}{e^{x^2} - 1}$.

Durata massima della prova: 6 ore