



## LICEO CLASSICO e SCIENTIFICO STATALE "Silvio Pellico - Giuseppe Peano"

Corso Giovanni Giolitti, 11 – 12100 Cuneo

tel. 0171 692906 – c. f. 80009910045

liceocuneo.it - info@liceocuneo.it - cnps02000n@pec.istruzione.it

Sez. staccata: Via Massimo D’Azeglio, 8 – 12100 Cuneo



### ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Sessione ordinaria 2022

#### SECONDA PROVA SCRITTA - MATEMATICA

*Il candidato svolga uno dei due problemi e quattro degli otto quesiti proposti.*

*Tempo a disposizione: ore 6.*

*È ammesso l'uso della calcolatrice scientifica o grafica non programmabile.*

#### PROBLEMA 1

a. Considera la famiglia di funzioni  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

Determina i valori dei parametri reali  $a, b, c, d$  in modo che la curva abbia un massimo in  $O(0,0)$  e un minimo in  $A(2,-4)$ .

Dopo aver verificato che  $f(x) = x^3 - 3x^2$ , traccia il grafico della funzione trovata, individuando il punto di flesso  $F$  e determinando l'equazione della tangente di flesso.

b. Trova un numero reale  $k > 3$  tale che il valor medio della funzione sull'intervallo  $[0, k]$  sia 0. Fornisci una interpretazione geometrica del risultato.

c. Considera la parte di piano  $\alpha$  compresa tra la cubica e l'asse  $x$  sull'intervallo  $[0, 3]$ . La retta passante per il punto di flesso e per il punto della curva di ascissa  $x = 3$  taglia  $\alpha$  in due parti A e B.

Calcola il rapporto tra le aree di A e B.

d. Discuti il numero di soluzioni dell'equazione  $f(x) = -\frac{5}{3}x + k$  al variare di  $k$ .

e. Calcola il volume del solido ottenuto ruotando attorno all'asse  $y$  la parte di piano compresa tra l'asse  $y$ , la curva e la tangente di flesso.



## LICEO CLASSICO e SCIENTIFICO STATALE "Silvio Pellico - Giuseppe Peano"

Corso Giovanni Giolitti, 11 – 12100 Cuneo

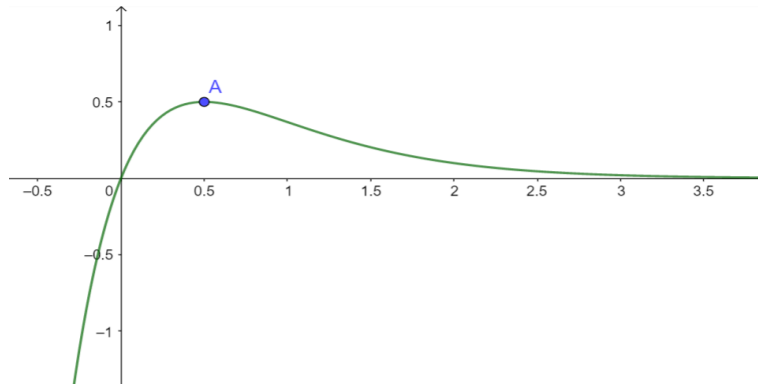
tel. 0171 692906 – c. f. 80009910045

liceocuneo.it - info@liceocuneo.it - cnps02000n@pec.istruzione.it

Sez. staccata: Via Massimo D’Azeglio, 8 – 12100 Cuneo



### PROBLEMA 2



- a. In figura è rappresentato il grafico di una funzione  $f(x)$ . Il punto  $A$  ha coordinate  $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ . Facendo riferimento al grafico proposto, tra le seguenti famiglie di funzioni individua quale rappresenta  $f(x)$ , motivando adeguatamente la scelta e le esclusioni:

a)  $f(x) = kx \ln^2 x$       b)  $f(x) = kxe^{1-2x}$       c)  $f(x) = \frac{kx}{1+x^2}$        $k \in \mathbb{R}, k > 0$

Stabilito che si tratta della famiglia b), verifica che il valore di  $k$  che soddisfa i requisiti imposti dal grafico è  $k=1$ .

- b.  $f(x)$  è la derivata di una funzione  $F(x)$ : sapendo che  $F(0) = -\frac{e}{4}$ , traccia il grafico qualitativo di  $F(x)$  senza calcolare l'espressione analitica, ma indicando estremanti, flessi e la natura degli eventuali asintoti, fornendo adeguate argomentazioni. Ricava poi la rappresentazione analitica della funzione  $F(x)$  e perfeziona il grafico qualitativo trovato; in particolare, scrivi l'equazione della tangente di flesso.
- c. Calcola l'area della porzione finita di piano delimitata dai grafici di  $F$  e di  $f$  e dalla retta  $x=1/2$ .
- d. Stabilisci se l'area formata dal grafico di  $f(x)$  con l'asse  $x$  nel primo quadrante è finita o infinita e, se è possibile, calcolala.
- e. Dopo aver enunciato il teorema della media, trova il valore di  $a$  per il quale il valor medio di  $f(x)$  nell'intervallo  $[-1/2, a]$  vale  $-2$ .



# LICEO CLASSICO e SCIENTIFICO STATALE "Silvio Pellico - Giuseppe Peano"

Corso Giovanni Giolitti, 11 – 12100 Cuneo

tel. 0171 692906 – c. f. 80009910045

liceocuneo.it - info@liceocuneo.it - cnps02000n@pec.istruzione.it

Sez. staccata: Via Massimo D’Azeglio, 8 – 12100 Cuneo



## QUESTIONARIO

1. Considera la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo:  $f(x) = \begin{cases} ae^x + 2 & x \leq 0 \\ -\frac{x^2}{4} + bx + 3 & x > 0 \end{cases}$

Determina il valore dei parametri reali  $a$  e  $b$  tali che la funzione risulti derivabile in  $\mathbb{R}$ .

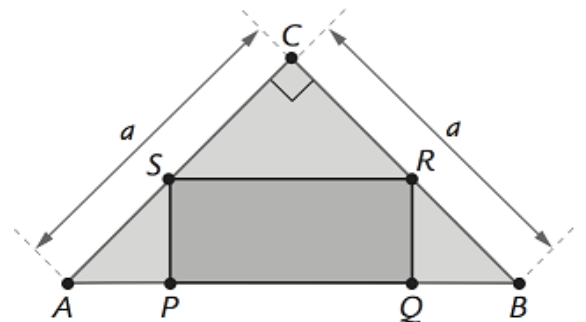
Verifica che  $f(x)$  soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo  $[-1; 6]$ , determinando l'ascissa del punto che ne soddisfa la tesi.

2. Considera la regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione  $y = \sqrt{kx}$ , dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione  $x = 1$ . Determina per quale valore di  $k$  il solido che si ottiene dalla rotazione completa di tale regione attorno all'asse  $x$  ha lo stesso volume di quello ottenuto da una rotazione completa attorno all'asse  $y$ .

3. Tra le primitive della funzione  $f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x^2+2x+1}$  determina quella che ha per asintoto obliquo la retta  $y = x - 3$ .

4. Utilizzando gli opportuni teoremi, dimostra che l'equazione  $2^x + x^3 - 2 = 0$  ha una sola soluzione nell'intervallo  $[0; 1]$  e determinane il valore approssimato in un intervallo di ampiezza 0,1.

5. Il rettangolo  $PQRS$  in figura è inscritto nel triangolo rettangolo isoscele  $ABC$ , in cui i cateti misurano  $a$ . Stabilisci se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando adeguatamente la risposta: «Il cilindro che si ottiene da una rotazione completa del rettangolo  $PQRS$  intorno ad  $AB$  ha volume massimo quando il rettangolo  $PQRS$  ha area massima».





## LICEO CLASSICO e SCIENTIFICO STATALE "Silvio Pellico - Giuseppe Peano"

Corso Giovanni Giolitti, 11 – 12100 Cuneo

tel. 0171 692906 – c. f. 80009910045

liceocuneo.it - info@liceocuneo.it - cnps02000n@pec.istruzione.it

Sez. staccata: Via Massimo D’Azeglio, 8 – 12100 Cuneo



6. Calcola il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt$$

7. Sapendo che in un circuito l'intensità di corrente è data dalla funzione:

$$i(t) = \frac{3t+1}{1+t^2},$$

dove  $i$  è misurata in  $mA$  e  $t$  in  $s$ , determina la quantità di carica che passa attraverso il circuito nell'intervallo di tempo tra gli istanti:

$$t = 1 \text{ s} \quad \text{e} \quad t = \sqrt{3} \text{ s}.$$

8. Sono date una funzione  $f$  e le sue derivate  $f'$  e  $f''$  i cui grafici sono mostrati in figura. Associa correttamente i grafici A, B e C alle tre funzioni, motivando la risposta.

