GAETANO LICEO SCIENTIFICO STATALE
SALVEMINI

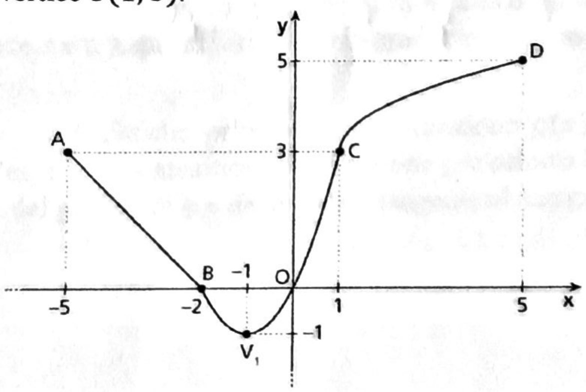
Sessione ordinaria 2022
Seconda prova scritta

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE
Indirizzi: LI02 - SCIENTIFICO
LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

La funzione f è definita nell'intervallo chiuso e limitato $[-5,5]$, in esso continua e derivabile nell'intervallo aperto. Inoltre, sappiamo che $f(-5) = 0$.
Il grafico della funzione derivata prima f', riportato in figura, consiste in un segmento, un arco di parabola con asse parallelo all'asse y e con vertice $V_1(-1;-1)$ e un arco di parabola con asse parallelo all'asse x e con vertice $C(1;3)$.



a. Determina l'espressione analitica della funzione derivata prima f' usando le informazioni contenute nella figura.

b. Calcola i seguenti integrali

$$\int_{-5}^{0} f'(x)\,dx; \quad \int_{-2}^{1} f'(x)\,dx.$$

c. Determina l'espressione analitica della funzione f e verifica che il suo grafico presenta un unico flesso di ordinata $\frac{23}{6}$.

d. Stabilisci, inoltre, se è possibile applicare il teorema di Rolle alla funzione f nell'intervallo $[-2; 1]$ e, in caso affermativo, determina le ascisse dei punti di cui è garantita l'esistenza.

Liceo Scientifico "Gaetano Salvemini" – Centro Studi Polivalente Japigia
Via G. Prezzolini, 9 - 70126 BARI – Tel. +39 080 5548739 – Fax 080 5548739
e-mail: baps060001@istruzione.it – PEC: baps060001@pec.istruzione.it
web: http://www.liceosalvemini.edu.it – C.F. 80016760722 - C.U.U.: UFZ1VZ

e. Calcola l'area della regione finita di piano R compresa fra il grafico della funzione f, la retta tangente t al grafico della funzione f nel suo punto di ascissa $x = 2$ e le rette verticali di equazioni $x = 1$ e $x = 5$.

PROBLEMA 2

Considera le curve di equazione

$$f(x) = e^{\frac{x^2+ax}{x^2+a}}$$

con $a > 0$.

a. Determina le coordinate dei punti A e B (con $x_A < x_B$) per i quali passano tutte le curve del fascio e verifica che tutte sono tangenti in A alla stessa retta t. Scrivi l'equazione di t.

b. Determina il valore del parametro a per il quale la funzione ha un punto stazionario in $x = 3$. Assumi, d'ora in avanti, di avere $a = 3$, studia la funzione corrispondente fino alla derivata prima e tracciane il grafico. Sulla base delle informazioni note, quanti potrebbero essere i punti di flesso per la funzione? Motiva la risposta.

c. Detta s la retta tangente al grafico della curva in B, calcola l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle rette s e t. Esprimi il risultato in gradi e primi sessagesimali.

d. Deduci da f le caratteristiche principali della funzione $g(x) = \ln f(x)$ e tracciane il grafico. Scrivi l'espressione analitica della funzione g e calcola l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico di g e dalla retta r tangente al suo grafico in $x = 0$.

UESITI

1. Determina per quali valori dei parametri reali non nulli a e b valgono simultaneamente le seguenti uguaglianze:

$$\int_{-1}^{0} \frac{ax-b}{1+x^2}\,dx = -\frac{\ln 2}{2} \quad \text{e} \quad \int_{0}^{1} \frac{ax-b}{1+x^2}\,dx = 0.$$

2. Considera la funzione

$$y = f_k(x) = x^2(k - e^{-x}), \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

Verifica che la funzione soddisfa l'equazione differenziale

$$xy' - 2y = x^3 e^{-x}, \qquad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Fra le funzioni f_k determina l'espressione della funzione f, soluzione particolare dell'equazione differenziale che possiede un punto stazionario di ascissa $x = 1$.

3. Dimostra che l'equazione

$$2^x - \cos x - 1 = 0$$

ha una sola soluzione nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. In un cono circolare retto, il raggio di base misura r e l'altezza è $h = kr$, con $k > 0$. Determina il raggio di base e l'altezza del cilindro retto di volume massimo inscritto con la base inferiore sovrapposta a quella del cono.

5. Determina per quali valori dei parametri reali a e b il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx} - x$$

ammette come asintoto obliquo per $x \to +\infty$ la retta di equazione $y = 2x + 1$.

6. Calcola il seguente limite

$$\lim_{x \to 2} \frac{\int_4^{x^2} \sqrt{1 + \sin(\pi t)}\, dt}{x^2 - 4}.$$

7. Studia la convergenza del seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2}.$$

8. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = 1 + \int_1^{x^2-3} (5t - 3)dt$$

nel punto di ascissa $x = 2$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

... necessaria una copia cartacea. (Informativa ai sensi del D.Lgs. 82/2005)