ISTITUTO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

“Galileo Ferraris”

ISTITUTO TECNICO TECNOLOGICO STATALE “GALILEO FERRARIS” - C.M. BATF06401B

LICEO SCIENTIFICO OPZIONE SCIENZE APPLICATE “RITA LEVI MONTALCINI” - C.M. BAPS064019

ESAME DI STATO A.S.2021-2022

SECONDA PROVA SCRITTA: MATEMATICA

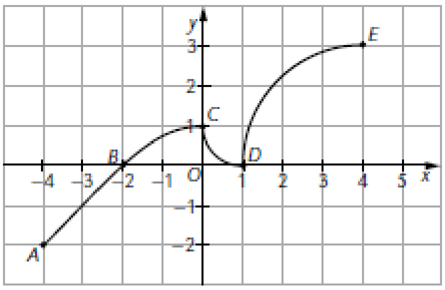
Il candidato risolva un problema e quattro quesiti tra le seguenti proposte

Problema 1

In figura è mostrato il grafico di una funzione $y = f(x)$, definita nell’intervallo [-4 , 4].

La curva è composta dai seguenti quattro tratti:

- AB, un segmento di retta;
- BC, un arco di parabola, con vertice in C;
- CD, un quarto di circonferenza;
- DE, un quarto di circonferenza.



1. Scrivi l’espressione analitica della funzione e studia la sua derivabilità, con particolare riferimento a quanto si verifica nei punti di raccordo tra i vari tratti sopra elencati e negli estremi della curva: fornisci giustificazioni grafiche ed analitiche. Individua i punti di massimo e di minimo relativi e assoluti della funzione.
2. Traccia un grafico qualitativo della funzione $y = f'(x)$, motivando opportunamente le tue scelte.

3. Considera la funzione $F(x) = \int_{-4}^{x} f(t)dt$, con x∈ [-4,4]: senza effettuare calcoli, determina i valori di $F(-4), F(-2), F(0), F(1), F(4)$.
4. Considera *G(x)* la restrizione di $F(x)$ all'intervallo [-4,0] , scrivi la sua espressione analitica .
5. Disegna il grafico di *G(x)*

Problema 2

Considera la famiglia di funzioni $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f_k(x) = \frac{x+k}{x^2+1},$$

dove k è un parametro reale.

1. Dimostra che, per qualsiasi valore di k, il grafico di $f_k(x)$ presenta un punto di massimo relativo, un punto di minimo relativo e un solo asintoto.

2. Dimostra che, per qualsiasi valore di k, la retta tangente al grafico di $f_k(x)$ nel suo punto C di intersezione con l'asse y ha in comune con il grafico di $f_k(x)$ anche l'intersezione D con l'asse x. Determina per quale valore di $k > 0$ il segmento CD misura $2\sqrt{2}$.

3. Indica con $g(x)$ la funzione che si ottiene per il valore $k = 2$ trovato al punto precedente. Studia e rappresenta graficamente $g(x)$, limitandoti allo studio della derivata prima.

4. Trova per quale valore di k nella famiglia delle funzioni $f_k(x)$ si ottiene la funzione $h(x)$ che ha il grafico simmetrico rispetto all'origine.
Verifica che $g(x) > h(x)$ per ogni x del loro dominio e calcola l'area compresa tra i grafici delle due funzioni nell'intervallo $[-1; 1]$.

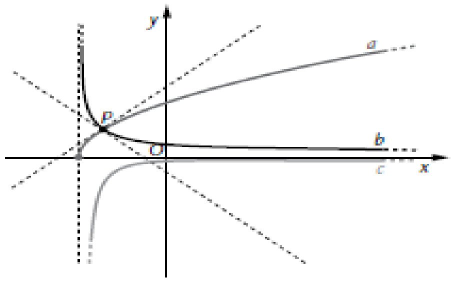
5. Considera ora
$$F(x) = \int_0^x h(t)\, dt.$$
Calcola $F(\sqrt{3})$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{\ln x}$.

Quesiti

1. In figura sono disegnati i grafici di una funzione *f*(x) e delle sue derivate *f'(x)* e *f''(x)*. Due di essi si incontrano nel punto P, nel quale sono state tracciate le corrispondenti rette tangenti.

a. Associa ad ogni funzione il suo rispettivo grafico.

b. Sapendo che $f'(x) = \frac{1}{f(x)}$, determina l'ordinata di P e i coefficienti angolari delle due tangenti.



2. Data la funzione $f(x) = x\log_2 x - x - 1$, spiega perché essa non è invertibile in tutto il suo dominio. Dopo aver verificato che la funzione si annulla per x=α, con 2< α< 3, mostra invece che la funzione è invertibile nell'intervallo (α, +∞). Detta *F(x)* la funzione inversa di $f(x)$ in tale intervallo, scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di *F(x)* nel punto di ascissa 3.

3. Studia la continuità e la derivabilità della funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} |(x-1)^2(x-3)| & x \geq 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & x < 0 \end{cases}$$

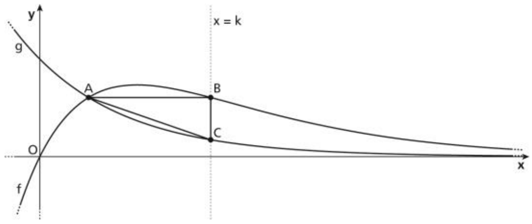
E' possibile applicare alla funzione suddetta il teorema di Lagrange nell'intervallo [1, 3]? E nell'intervallo [1, 4]?

4. Si calcoli l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}\; dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.

5. Si determini un polinomio P(x) di terzo grado tale che:

$$P(0) = P'(0) = 0,\; P(1) = 0 \;\text{ e }\; \int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{12}$$

6. Considera le funzioni $f(x) = 2xe^{-x}$ e $g(x) = e^{-x}$, il cui andamento è rappresentato in figura, e il triangolo ABC i cui vertici sono il punto A in comune tra le due curve e i punti B e C che le due curve hanno in comune con la retta $x = k$, dove $k \geq 1$ è un parametro reale.



Determina per quale valore di k l'area del triangolo ABC è massima.

7. Considera la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2}{p(x)},$$

dove $p(x)$ è un polinomio.

Determina $p(x)$ sapendo che il grafico di $f(x)$ presenta un asintoto obliquo di equazione $y = \frac{1}{2}x + 1$ e che in $x = 4$ presenta un punto di singolarità eliminabile.

Ricava le equazioni degli eventuali altri asintoti e le coordinate degli eventuali massimi e minimi relativi della funzione $f(x)$.

8. Determina l'angolo formato dalle tangenti al grafico della funzione

$$f(x) = 1 + \sqrt{x^2 - x^4}$$

nel suo punto angoloso.