

PROVA DI MATEMATICA DELL'ESAME DI STATO
PER IL LICEO SCIENTIFICO "L.B. ALBERTI" DI CAGLIARI

Si risolva uno dei problemi e si risponda a quattro quesiti.

Problema 1

Sia $f(x)$ la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{x+a}{bx^2+cx+2}$$

- 1) Si determinino i valori dei parametri a, b, c che figurano nell'espressione della funzione disponendo delle seguenti informazioni:
 - a) I valori di a, b, c sono 0 o 1;
 - b) Il grafico della funzione $f(x)$ passa per il punto $(-1, 0)$;
 - c) La retta di equazione $y = 1$ è un asintoto di $f(x)$
- 2) Si disegni il grafico della funzione.
- 3) Si calcoli l'area della regione finita di piano del primo quadrante degli assi cartesiani compresa tra l'asintoto orizzontale, il grafico della funzione e le rette $x = 0$ e $x = 2$

Problema 2

Determinare il triangolo di area massima che abbia come base una corda $2x$ della circonferenza di raggio r e come angolo opposto ad essa l'angolo avente il centro della medesima circonferenza.

1. Studiare la funzione individuata al punto precedente, cioè $f(x) = x\sqrt{r^2-x^2}$, per $r=4$, considerando anche le ascisse negative.
2. Verificare se tale funzione soddisfa tutte le condizioni del teorema di Rolle in $[0,r]$;
3. Determina l'area compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle x nell'intervallo $[0,3]$.

QUESITI

QUESITO 1

Data la funzione $f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$

si verifichi che esiste un solo punto ξ interno all'intervallo chiuso $[-1, 0]$, tale che la tangente al diagramma in questo punto è parallela alla corda congiungente i due punti estremi del diagramma.

QUESITO 2

Considera la seguente famiglia di funzioni $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{se } x \in [0, 2) \\ \frac{16}{x+2} & \text{se } x \in [2, \infty) \end{cases}$

Per quali coppie di numeri reali (a, b) la funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle in $[0, 6]$?

QUESITO 3

Determina per quale/i valore/i di k la tangente al grafico della funzione $f(x) = \ln(x^2)$ nel punto di ascissa $x = k$ passa per l'origine degli assi.

QUESITO 4

Calcolare l'area della parte finita di piano delimitata dalla curva d'equazione $y = 2e^x - 1$ e dagli assi cartesiani.

QUESITO 5

Stabilisci se è possibile calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sin x}{3x + \sin x}$ utilizzando il teorema di De L'Hôpital, motivando adeguatamente la tua risposta. Puoi fare le stesse considerazioni anche per il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{3x + \sin x}$?

In ogni caso determina il valore dei due limiti senza utilizzare il teorema.

QUESITO 6

Determinare a e b in modo che il grafico della funzione $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{2x - 5}$ abbia come asintoto obliquo la retta $y = 3x + 2$.

QUESITO 7

Si calcoli il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$

QUESITO 8

Determina il dominio di derivabilità della funzione $f(x) = |x^2 - 1|$ e studia la natura degli eventuali punti di non derivabilità