Sessione ordinaria 2022
Seconda prova scritta

Istituto d'istruzione superiore G. B. Vaccarini – Catania

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi:LI03 – SCIENTIFICO – OPZIONE SCIENZE APPLICATE
LI15 – SCIENTIFICO – SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti

PROBLEMA 1

Lo studio epidemiologico del COVID-19 prevede che nel 2023 i contagi seguano la curva data dal grafico (in una parte del primo quadrante) di una funzione del tipo

$$\boldsymbol{y = \frac{a + x}{x^2 + bx + 28}}$$

dove a, b sono due costanti da determinare.

a) Determina i parametri $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione passi per $\boldsymbol{A(8; 0)}$ e abbia in tale punto tangente parallela alla retta $\boldsymbol{y = \frac{1}{4}x + 10}$.
b) Verificato che $\boldsymbol{a = -8}$ e $\boldsymbol{b = -11}$, studiare la funzione ottenuta. Si tralasci lo studio della derivata seconda ma si giustifichi la presenza di eventuali flessi.
c) Verificato che la funzione ha due punti a tangente orizzontale, determina la natura di tali punti e le tangenti alla funzione in tali punti.
d) rappresentata la retta di equazione $\boldsymbol{x + 2y - 8 = 0}$, determina l'area nel primo quadrante compresa tra la retta e la funzione.

PROBLEMA 2

Fissati due parametri reali non nulli a e b considera la funzione:

$$\boldsymbol{f(x) = (a + bx) \cdot e^{2x}}$$

a) Determina i parametri *a* e *b* in modo che il grafico di *f*(*x*) passi per il punto $(\boldsymbol{1}; \boldsymbol{0})$ e la retta tangente in tale punto abbia coefficiente angolare $\boldsymbol{m = e^2}$.
b) Provato che $\boldsymbol{a = -1}$ **e** $\boldsymbol{b = 1}$ studia e rappresenta la funzione corrispondente a tali valori dei parametri.
c) Determina la retta tangente *t* nel punto di flesso *F*.
d) Determina l'area della regione di piano *T* delimitata dalla curva e dall'asse delle ascisse e l'area delle due regioni in cui *T* resta suddivisa dalla retta t.

QUESITI

1) Studia la continuità e la derivabilità della funzione: $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & se \quad x\leq 0 \\ -(x-1)^3 & se \quad x\geq 0 \end{cases}$.

2) Data la funzione:

$$f(x)=e^{x+1}-2x$$

calcola la derivata nel punto $c=0$ attraverso la regole di derivazione e come limite del rapporto incrementale. Verifica che i due risultati sono uguali.

3) Determina per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ la funzione $y=kx^3-3kx^2+x+8$ è crescente in tutto il suo dominio

4) Calcola i limiti della funzione:

$$g(x)=\sqrt{\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}}$$

per $x\to 3$ e per $x\to+\infty$.

5) Nel piano cartesiano *xOy* è data la parabola di equazione $y=4-x^2$. Conduci una retta r, parallela all'asse delle ascisse, in modo che il triangolo *AOB* abbia area massima, essendo *A* e *B* le intersezioni della retta *r* con l'arco di parabola situato nel primo e nel secondo quadrante.

6) Trova i valori di a e b in modo che alla funzione

$$y=\begin{cases} e^x-2 & se\ x<0 \\ ax^2+x+b & se\ x\geq 0 \end{cases}$$

sia applicabile il Teorema di Rolle nell'intervallo $[-\ln 2\,;4]$.

7) Determina una primitiva della funzione

$$f(x)=(x+1)\sin x$$

passante per il punto **(0;3)**.

8) Calcolare il seguente integrale definito $\int_0^1 \ln\frac{x+2}{x+1}dx$ e dire se rappresenta l'area della regione *S* compresa tra il grafico di $f(x)=\ln\frac{x+2}{x+1}$ e l'asse *x* nell'intervallo **[0;1]**.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 65/2022, Art. 20 comma 11)
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.