ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzo: Liceo Scientifico

Tema di: Matematica

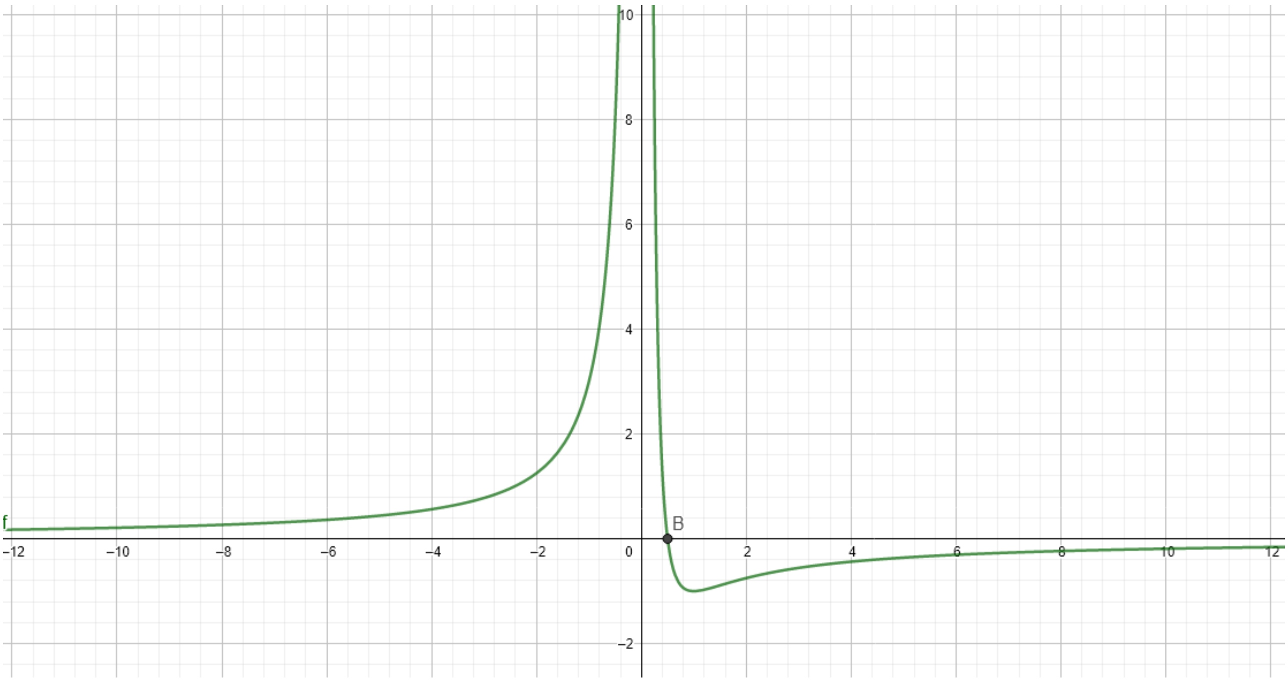
PROVA C

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a quattro degli otto quesiti.

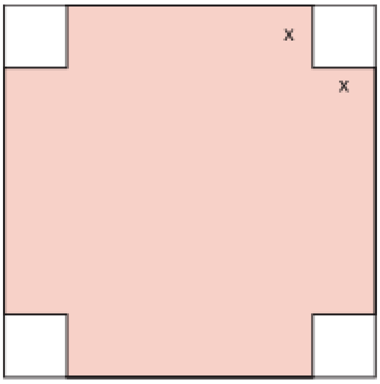
PROBLEMA 1

a) Studia la funzione $f(x) = \frac{-2x+1}{x^2}$ fino alla derivata seconda (per trovarne i flessi) e tracciane il grafico.

b) Una volta provato che il seguente è il grafico della funzione, determina il dominio e calcola il NUMERO di soluzioni che ha l'equazione $k = f(x)$ quando A) $k < -1$, B) $-1 \leq k < 0$, C) $k = 0$, D) $k > 0$. (Ricorda che determinare il numero di soluzioni dell'equazione $k = f(x)$ è analogo a determinare il numero di intersezioni tra le rette orizzontali di equazione $y = k$ e il grafico della funzione $y = f(x)$).



c) Dimostra che la funzione $V(x) = x^3(-2x+1)f(x)$ rappresenta la funzione obiettivo del seguente problema di ottimizzazione: "Ti trovi con un quadrato di cartone di dimensioni $1m$ X $1m$ e devi ricavarne un contenitore. Va benissimo che sia aperto dall'alto in quanto non hai bisogno di un coperchio però vuoi che abbia il massimo volume cioè che sia il più grande possibile. Per realizzarlo decidi di tagliare via i quattro angoli e di piegare il cartone per formare le face laterali. Come bisogna tagliare il quadrato di cartone per avere il cartone più capiente di tutti?” (Prima della funzione obiettivo dai le condizioni di esistenza alla variabile x. Inoltre della seconda immagine trascura le “alette” della scatola.)



d) Dopo aver provato che la funzione obiettivo è $V(x) = x(1-2x)^2$ ovvero $V(x) = 4x^3 - 4x^2 + x$ calcola la funzione $g(x) = \frac{V(x)}{(1-2x)(x^2-1)}$ scrivendone la sua espressione analitica ed infine calcola tutte le possibili primitive della funzione $g(x)$. (Utilizza il metodo di integrazione di funzioni razionali fratte con il metodo della scomposizione con A e B).

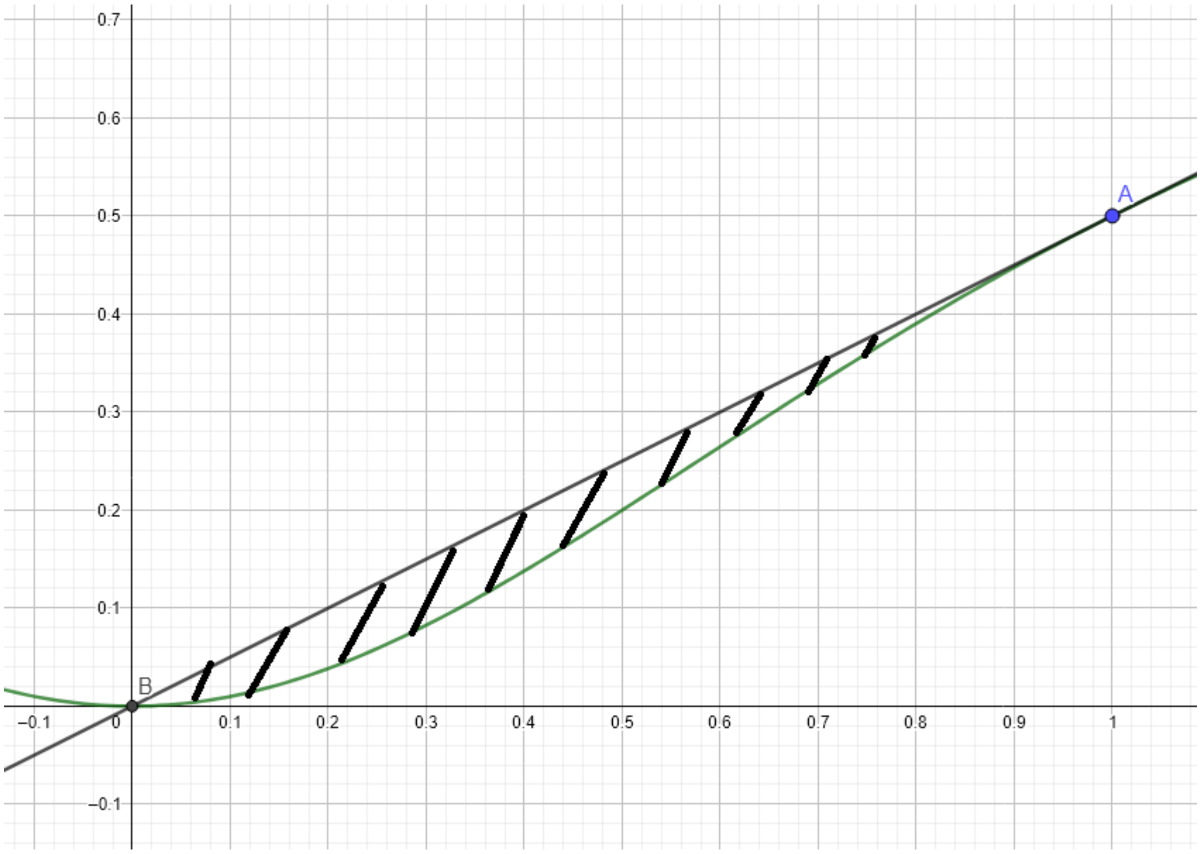
PROBLEMA 2

a) Sia data la funzione parametrica $f(x) = \frac{ax^2+b}{x^2+1}$. Calcola a e b affinché la retta $y = 1$ sia un asintoto orizzontale e che $f'(-1) = -\frac{1}{2}$.

b) Dopo aver provato che $a = 1$ e che $b = 0$, studia la funzione $f(x)$ e disegnane il grafico.

c) Determina la funzione $F(x)$ primitiva della funzione $f(x)$ che passi per il punto di coordinate $P(0; -1)$. (Ricorda che $\arctan 0 = 0$) Inoltre, considerato che, per definizione di primitiva, $F'(x) = f(x)$, discuti circa la crescenza e la decrescenza della funzione $F(x)$.

d) Calcola l’equazione della retta tangente alla funzione $f(x)$ nel punto di ascissa $x = 1$ e rappresentala accanto al grafico della funzione disegnata nel punto b). Dopodiché calcola le intersezioni di tale retta con la funzione e calcola l’area della parte tratteggiata compresa tra la retta a la funzione. (Ricorda che $\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$)



0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
−0.1
−0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
A
B

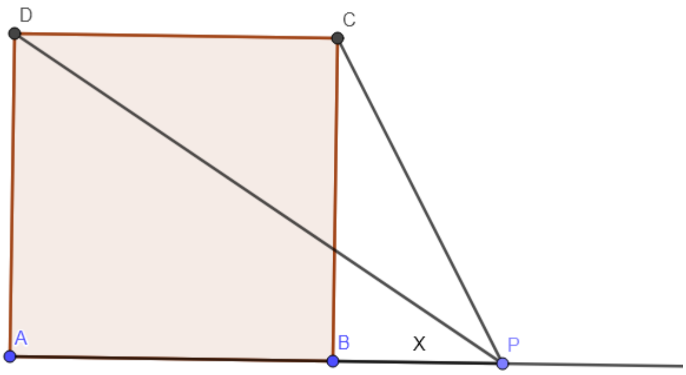
QUESITI

1. Determina il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 - 3x - 4) + \sqrt{2^{x-1} - 16}}{x + 2}$$

mettendo a sistema le condizioni di esistenza delle varie funzioni che compaiono. Inoltre, guardando solo il dominio, specifica perché la funzione non può essere né pari né dispari.

2. Dato un quadrato ABCD di lato 2, sia *P* un punto sul prolungamento di AB dalla parte di B. Indica con *x* la distanza di *P* da *B* e calcola il limite a cui tende la differenza $\overline{PD} - \overline{PC}$ quando $x \to \infty$. (Vedi figura e per calcolare il limite prima osserva la forma indeterminata e solo in seguito calcola utilizzando la razionalizzazione del numeratore)



3. Calcola il seguente limite con l'aiuto dei limiti notevoli:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^x}{x^2 + 3}$$

(Nel numeratore utilizzare un limite notevole, per il denominatore conviene mettere in evidenza x^2 e …).

4. Applicando De L'Hospital più volte, dopo aver esplicitato la forma indeterminata, determina il valore del parametro *a* affinché

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{ax^3 - 2x} = -\frac{1}{2}.$$

5. Determina i valori di *a* e di *b* affinché la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x^2 + 3} & se\ x \leq 1 \\ b \ln x + (2a + 1)x & se\ x > 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in tutto l'insieme dei numeri reali. (Ricorda che per derivare la funzione con radice quadrata devi utilizzare la regola di derivazione della funzione composta).

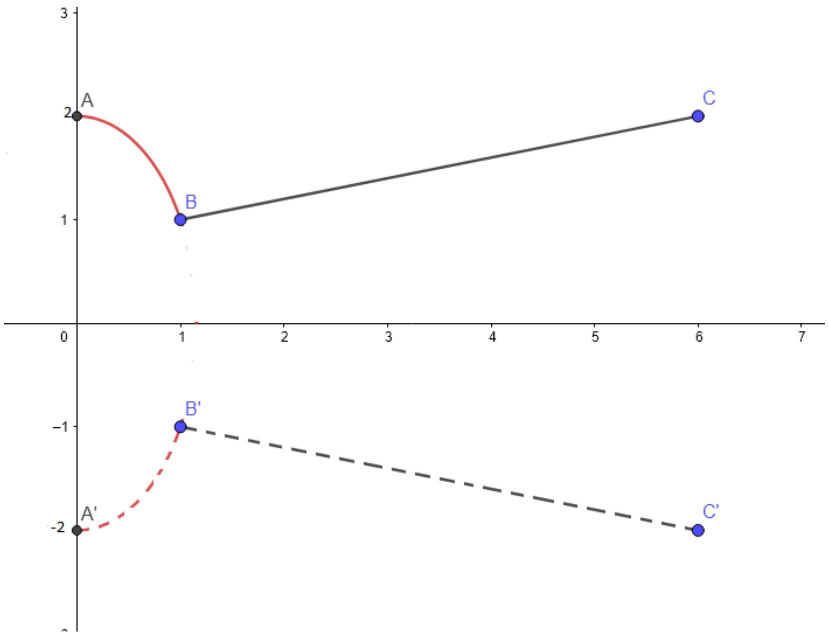
6. Data la funzione $f(x) = x^3 + 2x$ ristretta all'intervallo chiuso e limitato $[-2; 1]$, dimostra che valgono le ipotesi del teorema di Lagrange e trova il punto $P(x_0; f(x_0))$ la cui esistenza è assicurata dal teorema. Per verificare la validità del significato geometrico, calcola l'equazione della retta tangente alla funzione passante per il punto P e l'equazione della retta passante per i due punti $A(-2; f(-2))$ e $B(1; f(1))$ e verifica analiticamente che le due rette sono parallele tramite la ben nota condizione di parallelismo fra rette).

7. Data la funzione $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-5}}$ dimostra che il dominio è $D = \left]-\infty, -\sqrt{5}\right[\cup \left]\sqrt{5}, +\infty\right[$ e determina tutte le primitive della funzione $f(x)$. (Ti troverai con un integrale di tipo potenza). Determina, infine, il valore medio $\overline{M}$ della funzione nell'intervallo $\left[\sqrt{5}; 3\right]$ e spiega, indicando anche il teorema opportuno, perché esiste almeno un punto di ascissa x_0 (senza determinarlo/i) tale che $f(x_0) = \overline{M}$.

8. Calcola l'equazione della retta passante per i punti $B(1; 1)$ e $C(6; 2)$ e scrivi l'equazione in forma esplicita. Chiama $y = r(x)$ la funzione-equazione della retta e sia $g(x) = \sqrt{4 - 3x^2}$. Supponi che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \ se \ 0 \leq x < 1 \\ r(x) \ se \ 1 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

rappresenti il profilo di un vaso da fiori come vedi in figura. Per ottenere il vaso basta far ruotare attorno all'asse delle ascisse Supponi che l'unità di misura sia il *dm*. Calcola il volume del vaso espresso in dm^3.



Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.