Liceo Statale Girolamo Fracastoro, Verona

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 - SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA[1]

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

È data la seguente funzione reale di variabile reale:

$$f(x) = axe^{-x} + b$$

con a e b parametri reali positivi.

1. Determina i parametri a e b in modo che $f(x)$ assuma il valore 2 nel suo punto di massimo assoluto e che:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

2. Dopo aver verificato che i valori dei parametri che soddisfano le richieste sono: $a = e$ e $b = 1$, studia e traccia i grafici di $f(x)$ e $f'(x)$ in uno stesso riferimento cartesiano. Trova anche gli eventuali punti di flesso per $f(x)$.

3. Calcola poi la superficie compresa tra la funzione $f(x)$ e l'asse delle ascisse per l'intervallo $x \in [0, 5]$.

4. La funzione $g(x)$ è così definita: $g(x) = f(x) - 1$. Verifica, motivando la risposta, che la funzione $g(x)$ è integrabile impropriamente nell'intervallo $x \in [0, +\infty)$ e calcola l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ della funzione $g(x)$ specificando se l'integrale converge o diverge.

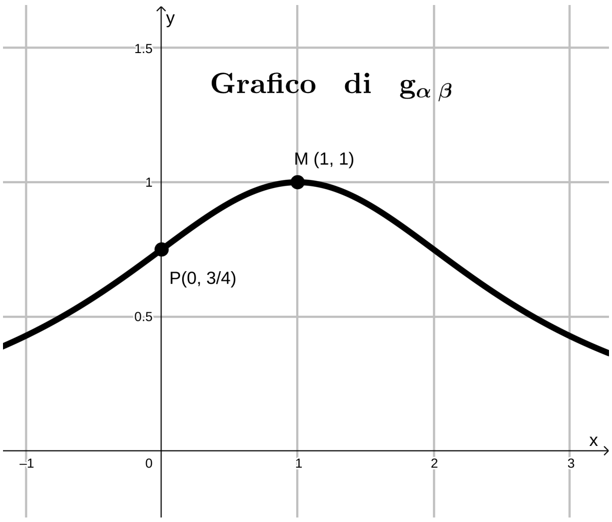
[1] Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 2

Fissati due parametri reali α e β , con $\beta > 0$, considera la funzione reale di variabile reale:

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta}$$

1. Determina i valori di α e β corrispondenti alla funzione $g_{\alpha\beta}$ rappresentata in figura.



2. Dopo aver verificato che tali valori sono $\alpha = 1$ e $\beta = 3$, calcola l'area della regione di piano delimitata dal grafico di $g_{13}(x)$, dall'asse x e dalle rette parallele all'asse y passanti per i punti di flesso.

3. Per un numero κ reale positivo, posto $I(\kappa) = \displaystyle\int_{1-\kappa}^{1+\kappa} g_{13}(x)dx$, calcola il limite:

$$\lim_{\kappa \to +\infty} I(k)$$

4. Detto A il limite precedente, determina un valore di κ per cui $I(\kappa) = \dfrac{A}{2}$ e verifica che $g_{13}(1+\kappa)$ e $g_{13}(1-\kappa)$ valgono entrambi la metà del massimo della funzione.

QUESITI

1. Il grafico della funzione f rappresentata in figura, definita nell'intervallo $[-2, 2]$ e continua in O, è formato da una semicirconferenza per $x < 0$ e da un arco di parabola per $x \geq 0$. Dedurre dal grafico lo studio della funzione derivata $y = f'(x)$, mettendo in evidenza in modo particolare:

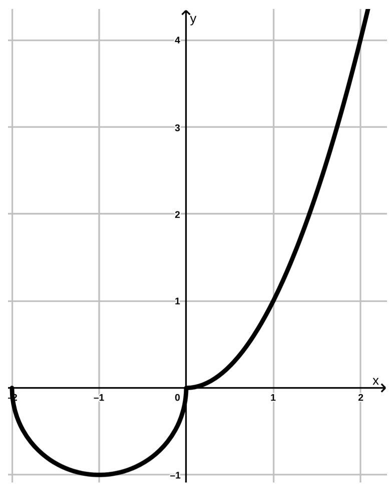
   (a) il calcolo dei limiti di $f'(x)$ per $x \to -2^+$, $x \to 0^-$, $x \to 0^+$, $x \to 2^-$;

   (b) il dominio di $y = f'(x)$;

   (c) il segno di $y = f'(x)$;

   (d) l'andamento della funzione $y = f'(x)$.

   Tracciare quindi il grafico di $y = f'(x)$.



2. Verifica che il grafico della funzione:

$$F(x) = 2 + \frac{1}{2}x - \int_2^x e^{(t-2)^2}\, dt$$

   ammette un punto di flesso di ascissa $x = 2$ e ricava l'equazione della retta tangente in tale punto.

3. Si consideri la funzione $f(x)$ definita ponendo:

$$f(x) = \begin{cases} ae^x + 2 & \text{se } x \leq 0 \\ -\frac{x^2}{4} + bx + 3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

   Determinare il valore dei parametri reali a e b tali che la funzione risulti derivabile in $\mathbb{R}$. Verificare se la funzione $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[0; 4]$.

4. Indicata con $A(h)$ l'area della regione compresa tra il grafico di $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, l'asse delle ascisse e le rette $x = h$ e $x = h + 2$ per $h > 0$, determina per quale valore di h l'area $A(h)$ è minima.

5. Il 75% degli studenti che stanno affrontando l'Esame di Stato ha già programmato le vacanze estive; di questi il 60% ha scelto una località all'estero, mentre il 90% di quelli che non l'hanno programmata opteranno per una meta in Italia.
   (a) Quale è la probabilità con cui verrà scelta una vacanza in Italia?
   (b) Se nel gruppo dei maturandi si scelgono a caso, in modo indipendente gli uni dagli altri, 50 studenti, con quale probabilità esattamente 5 di loro andranno in vacanza in una località italiana?

6. Determinare i parametri a, b e c reali non nulli in modo che il grafico della funzione $y = \dfrac{ax^2 + b}{bx + c - 1}$ abbia le rette $x = -2$ e $y = 2x - 4$ come asintoti.

7. Dati i punti $A(-1, 2, 0)$ e $B(0, 1, -2)$ determina:
   (a) l'equazione del piano α passante per A e perpendicolare alla retta AB;
   (b) l'equazione del piano β tangente in B alla sfera di centro A;
   (c) la distanza fra i due piani α e β.

8. Dimostrare che la funzione $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$ è una funzione costante a tratti e la costante nell'intervallo $]-\infty, 0[$ è diversa dalla costante nell'intervallo $]0, +\infty[$. Determinare tali costanti.