Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Indirizzi: LI22 - SCIENTIFICO QUADRIENNALE
LI23 - SCIENTIFICO OPZIONE SCIENZE APPLICATE QUADRIENNALE

Disciplina: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione $f(x) = x^{\alpha} \cdot e^{x}$, definita nell'insieme dei numeri reali.

1. Determinare il valore minimo del parametro α, intero positivo, in modo che la funzione $f(x) = x^{\alpha} \cdot e^{x}$ abbia un minimo assoluto nell'origine del sistema di riferimento.
2. Posto $\alpha = 2$, tracciare il grafico rappresentativo Γ della funzione di equazione $y = f(x)$, individuando asintoti, estremi e flessi.
3. Determinare l'area della regione del II quadrante delimitata dal grafico Γ, dall'asse delle ordinate e dalla retta tangente a Γ nel suo punto di massimo relativo.
4. Al variare del parametro $k \in R$, determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$. Specificare per quali valori del parametro l'equazione ammette due soluzioni concordi.

PROBLEMA 2

Si consideri la famiglia di funzioni $f_k(x) = kx^4 + x^3 + 2kx^2$ con $k \geq 0$.

1. Al variare del parametro *k*, studiare la monotonia, specificando la natura dei punti stazionari.
2. Tracciare il grafico γ_1 della funzione corrispondente al valore $k = \frac{3}{8}$ determinando, in particolare, le coordinate dei due punti di flesso F_1 e F_2. Scrivere le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti a γ_1 in F_1 e F_2.
3. Scrivere l'equazione $y = g(x)$ della funzione simmetrica di f rispetto all'asse delle ascisse e se ne tracci il grafico rappresentativo γ_2 nel medesimo piano cartesiano in cui è tracciato γ_1. Si indichi con *R* la regione delimitata da γ_1, γ_2 e dalla retta $x = 1$ e se ne calcoli l'area.
4. Calcolare, al variare del parametro *k*, i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_k(x)}{sen^k(x)} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{f_k(x)}{|sen^k(x)|}$$

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Indirizzi: LI22 - SCIENTIFICO QUADRIENNALE
LI23 - SCIENTIFICO OPZIONE SCIENZE APPLICATE QUADRIENNALE

Disciplina: MATEMATICA

QUESITI

1. Data una circonferenza di centro *O*, siano *PA* e *PB* i segmenti di tangente alla circonferenza condotti da un suo punto esterno *P*. Dimostrare che il quadrilatero *AOBP* ha le diagonali perpendicolari.
2. È data un'urna contenente 10 palline bianche e 6 palline nere. Calcolare la probabilità che:
   - Estraendo una pallina, sia di colore nero;
   - Estraendo due palline contemporaneamente, siano entrambe di colore nero;
   - Estraendo due palline contemporaneamente, siano di colore diverso.
3. Determinare le coordinate della proiezione ortogonale *H* del punto $A(4,-1,1)$ sul piano $\pi: 3x-2y+z=1$. Determinare le equazioni cartesiane del luogo geometrico dei punti di π che hanno distanza $3\sqrt{2}$ da *A*.
4. È data la parabola di equazione $f(x)=-3x^2+6x$. Determinare le coordinate del punto *P* appartenente alla porzione di curva $f(x)$ nel I quadrante tale che sia massimo il prodotto delle distanze di *P* dagli assi cartesiani.
5. Gli angoli di un triangolo, inscritto in una circonferenza di raggio 7 m, hanno ampiezze α, β e γ. Sapendo che $\alpha=\frac{\pi}{6}$ e che $cos\beta=\frac{1}{7}$, determinare il valore di $sen\gamma$ e l'area del triangolo *ABC*.
6. Assegnata la curva $y=ax^3+bx^2+cx+d$, determinare i valori dei parametri reali in modo che passi per $A(-1,-3)$, $B(1,-1)$ e risulti tangente in $C(0,1)$ alla retta $t: y=2x+1$. Determinare infine le coordinate dell'ulteriore punto Q di intersezione tra la curva e la retta t.
7. Dimostrare che la regione finita di piano contenuta nel primo quadrante, delimitata dagli assi cartesiani e dalla curva $y=\frac{k-x}{x^2+k^2}$ con $k>0$, ha area costante pari a $\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$.
8. Data la funzione $f(x)=\frac{a}{1+be^{-cx}}$ con $a>0$, $b>0$ e $c>0$, determinare *a, b, c* sapendo che $f(x)$ ha come asintoto orizzontale la retta $y=5$ e che il grafico di $f(x)$ è tangente, in $x=0$, alla retta di equazione $y=\frac{2}{5}x+1$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico. (Nota MIM n. 9305 del 20 marzo 2023).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.