LICEO SCIENTIFICO AUSTRALE 2 ORDINARIA 2023 - PROBLEMA 1

Si consideri la funzione $f(x) = x^\alpha \cdot e^x$, definita nell'insieme dei numeri reali.

1)

Determinare il valore minimo del parametro α, intero positivo, in modo che la funzione $f(x) = x^\alpha \cdot e^x$ abbia un minimo assoluto nell'origine del sistema di riferimento.

La funzione è definita e continua e derivabile su tutto l'asse reale.

Pe stabilire che $x = 0$ è punto di minimo assoluto calcoliamo i limiti agli estremi del dominio e studiamo la derivata prima.

$\lim_{x\to-\infty} x^\alpha \cdot e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^\alpha}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$ (e^{-x} è infinito di ordine superiore rispetto ad x^α $per\ x \to -\infty$)

$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \cdot e^x = +\infty$

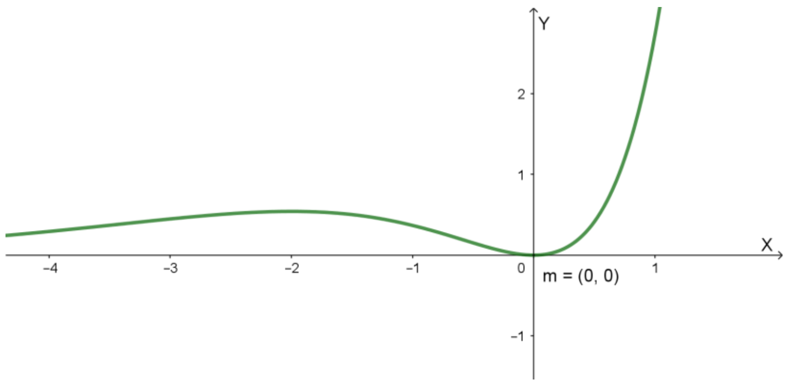
Studio della derivata prima:

$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \cdot e^x + x^\alpha \cdot e^x = x^{\alpha-1} \cdot e^x(\alpha + x)$

Essendo α intero positivo (quindi 1, 2, 3, …) abbiamo i seguenti casi:

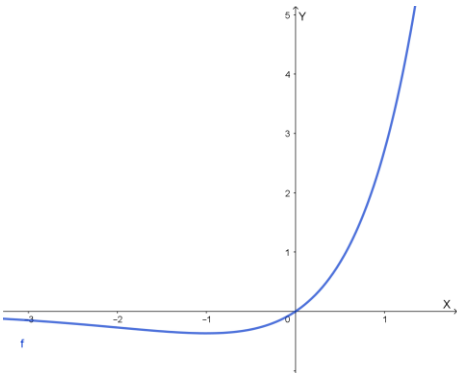
− $\boldsymbol{\alpha}$ ***pari*** $(quindi\ \alpha - 1\ dispari)$: $x^{\alpha-1} \cdot e^x(\alpha + x) \geq 0\ \ se\ x^{\alpha-1}(\alpha + x) \geq 0$ che equivale a dire

$x(\alpha + x) \geq 0$: $x \leq -\alpha\ \ vel\ \ x \geq 0$: la funzione cresce per $x < -\alpha$, decresce per $-\alpha < x < 0$ e cresce per $x > 0$. Essendo $\lim_{x\to-\infty} x^\alpha \cdot e^x = 0$, ed $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \cdot e^x = +\infty$: la funzione ha in $x = 0$ un punto di minimo assoluto. Il grafico è del tipo:

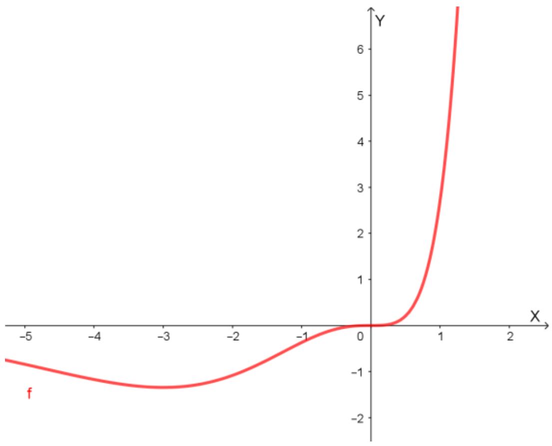


Siccome $\alpha = 2, 4, 6, ...$: *il minimo valore di α per cui la funzione ammette un minimo assoluto nell'origine degli assi cartesiani è α=2.*

- $\boldsymbol{\alpha}$ ***dispari*** $(quindi\ \alpha - 1\ pari)$:
  Se $\alpha = 1$, la funzione ha equazione $f(x) = x \cdot e^x$ ed è:
  $f'(x) = x^{\alpha-1} \cdot e^x(\alpha + x) = e^x(1 + x) > 0\ se\ x > -1$: la funzione è quindi decrescente per $x < -1$ e crescente per $x > -1$: nell'origine non c'è un minimo assoluto. Il grafico è del tipo:



Se $\alpha = 3, 5, 7, \ldots$ abbiamo:
$x^{\alpha-1} \cdot e^x(\alpha + x) = 0\ se\ x = 0\ e\ x = -\alpha\ ed\ è\ \ x^{\alpha-1} \cdot e^x(\alpha + x) > 0\ se\ x > -\alpha\ \ con\ x \neq 0$. Quindi la funzione decresce se $x < -\alpha$, cresce se $x > -\alpha$ e siccome la derivata si annulla per $x = 0$ in tale punto abbiamo un flesso a tangente orizzontale (e non un minimo assoluto). Il grafico è del tipo:



Riepilogando: *il valore minimo del parametro α, intero positivo, in modo che la funzione $f(x) = x^\alpha \cdot e^x$ abbia un minimo assoluto nell'origine del sistema di riferimento è 2.*

2)

Posto $\alpha = 2$, tracciare il grafico rappresentativo Γ della funzione di equazione $y = f(x)$, individuando asintoti, estremi e flessi.

Dobbiamo studiare la funzione di equazione: $\boldsymbol{f(x) = x^2 \cdot e^x}$

Dominio: tutto R.

Pari/Dispari: $f(-x) = x^2 \cdot e^{-x}$: né pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani: se $x = 0, y = 0. Se\ y = 0. x^2 \cdot e^x = 0,$ quindi $x = 0\ (doppia)$.

Segno della funzione:

$f(x) > 0\ se\ x^2 \cdot e^x > 0, quindi\ per\ ogni\ x\ \neq 0$

Limiti agli estremi del dominio:

$\lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = 0^+$ (e^{-x} è infinito di ordine superiore rispetto a x^2 per $x \to -\infty$): quindi

$y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$).

$\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^x = +\infty.$

Asintoti:

Abbiamo detto che c'è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Non ci sono asintoti verticali perché la funzione è continua su tutto R. Potrebbe esserci asintoto obliquo per $x \to +\infty$); verifichiamolo:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \cdot e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} x \cdot e^x = +\infty$: non c'è asintoto obliquo.

Monotonia:

$f'(x) = D(x^2 \cdot e^x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2 + x) = 0$ se $x = 0\ e\ x = -2$ (punti stazionari).

$f'(x) > 0$ se $xe^x(2 + x) > 0,\ \ x(2 + x) > 0: x < -2\ \ vel\ \ x > 0$. Quindi:

se $x < -2$ la funzione cresce, se $-2 < x < 0$ la funzione decresce, se $x > 0$ la funzione cresce.

Pertanto $x = -2$ è punto di massimo relativo: $M = \left(-2; \frac{4}{e^2}\right)$. $x = 0$ punto di minimo relativo (ed anche assoluto): $m = (0; 0)$.

Concavità:

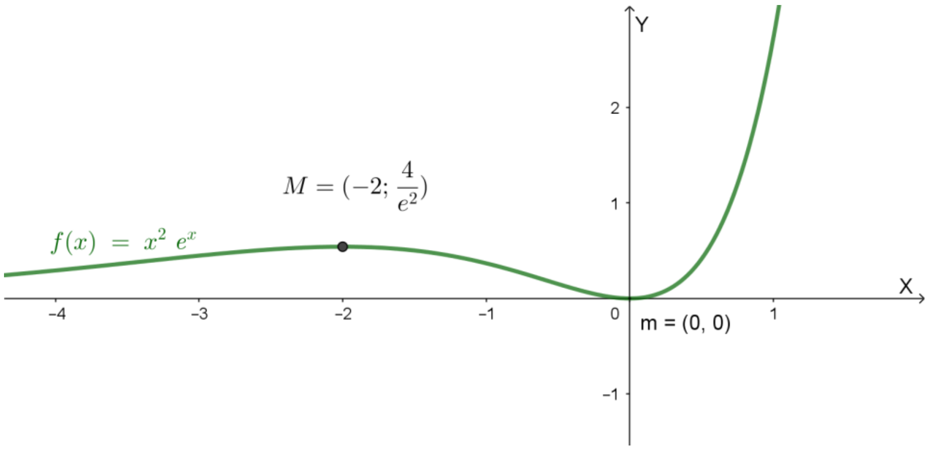
$f''(x) = D(2xe^x + x^2e^x) = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x) = e^x(x^2 + 4x + 2) > 0\ se\ x^2 + 4x + 2 > 0.$

Risulta $x^2 + 4x + 2 = 0$ se $x = -2 \pm \sqrt{2}$. Quindi $x^2 + 4x + 2 > 0$ se $x < -2 - \sqrt{2}\ \ vel\ \ x > -2 + \sqrt{2}$

Pertanto: se $x < -2 - \sqrt{2}$ il grafico volge la concavità verso l'alto, se $-2 - \sqrt{2} < x < -2 + \sqrt{2}$ il grafico volge la concavità verso il basso, se $x > -2 + \sqrt{2}$ il grafico volge la concavità verso l'alto. Quindi:

$x = -2 \pm \sqrt{2}$ sono punti di flesso. E risulta: se $x = -2 - \sqrt{2}, y = \left(-2 - \sqrt{2}\right)^2 e^{-2-\sqrt{2}} \cong 0.4$
Se $x = -2 + \sqrt{2},\ y = \left(-2 + \sqrt{2}\right)^2 e^{-2+\sqrt{2}} \cong 0.2.$

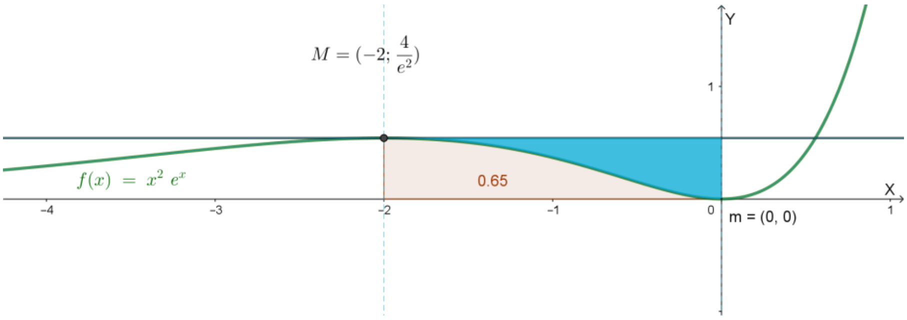
Il grafico è quindi il seguente:



3)

Determinare l'area della regione del II quadrante delimitata dal grafico Γ, dall'asse delle ordinate e dalla retta tangente a Γ nel suo punto di massimo relativo.

Rappresentiamo la regione richiesta (in azzurro):



L'area richiesta A si ottiene sottraendo all'area del rettangolo di base 2 e altezza $\frac{4}{e^2}$ l'area della regione del secondo quadrante delimitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalla retta $x = -2$. Quindi:

$$A = (2)\left(\frac{4}{e^2}\right) - \int_{-2}^{0} x^2 \cdot e^x \, dx$$

Cerchiamo una primitiva di $x^2 \cdot e^x$ integrando due volte per parti:

$$\int x^2 \cdot e^x \, dx = \int x^2 \cdot (e^x)' \, dx = x^2 \cdot e^x - \int 2xe^x \, dx = x^2 \cdot e^x - \left[\int 2x(e^x)' \, dx\right] =$$

$$= x^2 \cdot e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x \, dx\right) = x^2 \cdot e^x - (2xe^x - 2e^x) + C = x^2 \cdot e^x - 2xe^x + 2e^x + C =$$

$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C$. Quindi:

$$A = (2)\left(\frac{4}{e^2}\right) - \int_{-2}^{0} x^2 \cdot e^x \, dx = \frac{8}{e^2} - [e^x(x^2 - 2x + 2)]_{-2}^{0} = \frac{8}{e^2} - [2 - (e^{-2}(10)] = \frac{8}{e^2} - 2 + \frac{10}{e^2} =$$

$$= \left(\frac{18}{e^2} - 2\right) u^2 \cong 0.44 \, u^2 = A$$

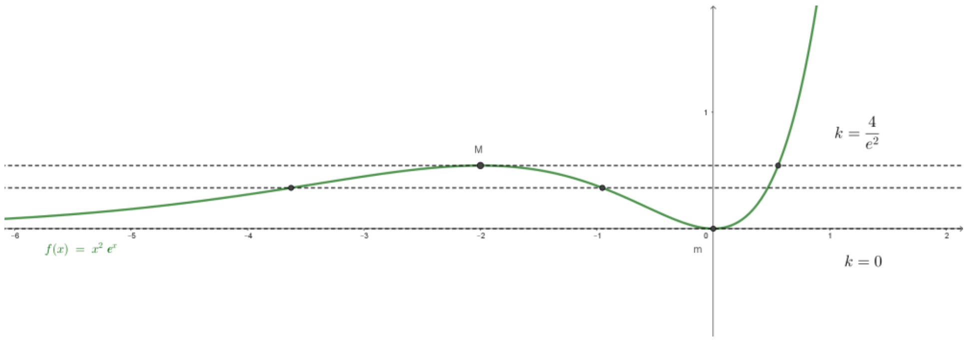
4)

Al variare del parametro $k \in R$, determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
Specificare per quali valori del parametro l'equazione ammette due soluzioni concordi.

Discutiamo il numero di soluzioni dell'equazione: $\boldsymbol{x^2 \cdot e^x = k}$.

Il numero delle soluzioni corrisponde al numero delle intersezioni tra i grafici di
$y = f(x) = x^2 \cdot e^x$ e $y = k$.

Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano la funzione ed alcune rette del tipo $y = k$:



- Se $k < 0$: nessuna soluzione.
- Se $k = 0$: due soluzioni coincidenti (nulle).
- Se $0 < k < \frac{4}{e^2}$: 3 soluzioni distinte, di cui due negative ed una positiva.
- Se $k = \frac{4}{e^2}$: tre soluzioni di cui due coincidenti e negative (precisamente uguali a -2) ed una positiva.
- Se $k > \frac{4}{e^2}$: una soluzione positiva.
-

Specificare per quali valori del parametro l'equazione ammette due soluzioni concordi

Ci sono due soluzioni distinte e concordi (in particolare negative) se $0 < k < \frac{4}{e^2}$. Se $k = \frac{4}{e^2}$ ci sono due soluzioni concordi (negative) e coincidenti (uguali a -2).

Con la collaborazione di Angela Santamaria