LICEO SCIENTIFICO AUSTRALE 2 ORDINARIA 2023 - PROBLEMA 2

Si consideri la famiglia di funzioni $f_k(x) = kx^4 + x^3 + 2kx^2$ *con* $k \geq 0$.

1)

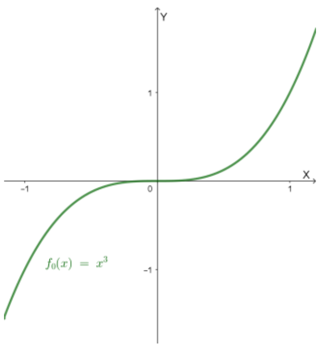
Al variare del parametro k, studiare la monotonia, specificando la natura dei punti stazionari

La funzione, razionale intera, è definita, continua e derivabile su tutto l'asse reale.
Studiamo la derivata prima:

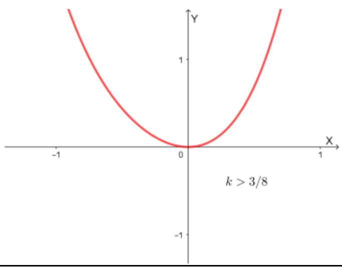
$f'(x) = 4kx^3 + 3x^2 + 4kx = x(4kx^2 + 3x + 4k)$

- **Se $k = 0$**: $f'(x) = x(3x) = 3x^2 \geq 0$ *per ogni* x, *in paricolare* $f'(x) = 0$ *per* $x = 0$, che è punto stazionario. Essendo per $x \neq 0$ $f'(x) > 0$, la funzione è sempre crescente. Quindi:

Se $k = 0$ la funzione è sempre crescente ed ha in $x = 0$ un punto stazionario che è punto di flesso a tangente orizzontale.



- **Se $k > 0$**: $x(4kx^2 + 3x + 4k) \geq 0$; il discriminante dell'equazione $4kx^2 + 3x + 4k = 0$ è: $\Delta = 9 - 64k^2$. Si hanno i seguenti casi:
  - **Se $9 - 64k^2 < 0$**, *quindi* $k < -\frac{3}{8}$ *vel* $k > \frac{3}{8}$ $\left(\textit{quindi } \boldsymbol{k > \frac{3}{8}} \textit{ perché } k > 0\right)$
    $4kx^2 + 3x + 4k > 0$ *per ogni* x . Pertanto:
    $f'(x) \geq 0$ *per* $x \geq 0$ (e la derivata si annulla per $x = 0$). Pertanto:
    - Se $k > \frac{3}{8}$ la funzione è decrescente per $x < 0$, crescente per $x > 0$ ed ha un punto stazionario in $x = 0$ che è un punto di minimo relativo (ed anche assoluto).



- ***Se*** $\boldsymbol{9-64k^2>0}$, cioè $-\frac{3}{8}<k<\frac{3}{8}$, equivalente a $\boldsymbol{0<k<\frac{3}{8}}$, risulta:
  $4kx^2+3x+4k\geq 0\ per\ x\leq\frac{-3-\sqrt{9-64k^2}}{8k}=x_1$ vel $x\geq\frac{-3+\sqrt{9-64k^2}}{8k}=x_2$.
  E risulta $\frac{-3-\sqrt{9-64k^2}}{8k}<0$. Confrontiamo $\frac{-3+\sqrt{9-64k^2}}{8k}$ con 0. Si ha:

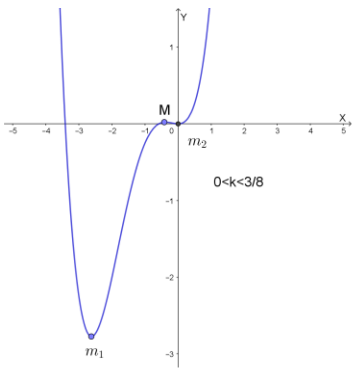
  $$\frac{-3+\sqrt{9-64k^2}}{8k}\geq 0\ se\ -3+\sqrt{9-64k^2}\geq 0,\sqrt{9-64k^2}\geq 3,$$

  $-64k^2\geq 0\ MAI$. Pertanto $\frac{-3+\sqrt{9-64k^2}}{8k}<0\ sempre$. Ne consegue che se
  $0<k<\frac{3}{8}$, $4kx^2+3x+4k\geq 0$ per $x\leq\frac{-3-\sqrt{9-64k^2}}{8k}$ vel $x\geq\frac{-3+\sqrt{9-64k^2}}{8k}$ (con entrambi i valori negativi).

		$\frac{-3-\sqrt{9-64k^2}}{8k}$		$\frac{-3+\sqrt{9-64k^2}}{8k}$		0	
x	-		-		-	•	+
$4kx^2+3x+4k$	+	•	-	•	+		+
$f'(x)$	-	•	+	•	-	•	+
	↘	m_1	↗	M	↘	m_2	↗

In conclusione, per $\boldsymbol{0<k<\frac{3}{8}}$:

se $x<\frac{-3-\sqrt{9-64k^2}}{8k}$ funzione decrescente, per $\frac{-3-\sqrt{9-64k^2}}{8k}<x<\frac{-3+\sqrt{9-64k^2}}{8k}$ crescente
per $\frac{-3+\sqrt{9-64k^2}}{8k}<x<0$ *decrescente*, per $x>0$ crescente.
La funzione ha quindi tre punti stazionari:
$x=\frac{-3-\sqrt{9-64k^2}}{8k}$ (minimo relativo), $x=\frac{-3+\sqrt{9-64k^2}}{8k}$ $(massimo\ relativo)$
ed $x=0$ (minimo relativo).



- $\boldsymbol{Se\ 9-64k^2=0}$, $k=\pm\frac{3}{8}$, $quindi\ (essendo\ k>0)\ \boldsymbol{k=\frac{3}{8}}$ risulta:
  $f'(x)=4kx^3+3x^2+4kx=x\left(\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}x(x^2+2x+1)$
  ed è: $f'(x)=\frac{3}{2}x(x^2+2x+1)=\frac{3}{2}x(x+1)^2\geq 0\ \ per\ x\geq 0$, con $f'(x)=0\ per$
  $x=0\ \ e\ \ x=-1.$

  In questo caso, quindi, $k=\frac{3}{8}$, la funzione decresce per $x<0$, cresce per $x>0: x=0$ è punto di minimo relativo (ed anche assoluto). Inoltre $x=-1$ è punto di flesso a tangente orizzontale.

Riepilogando:

- **Se $\boldsymbol{k=0}$** la funzione è sempre crescente ed ha in $x=0$ un punto stazionario che è punto di flesso a tangente orizzontale.

- Se $\boldsymbol{0<k<\frac{3}{8}}$ la funzione è decrescente se $x<\frac{-3-\sqrt{9-64k^2}}{8k}$ crescente per $\frac{-3-\sqrt{9-64k^2}}{8k}<x<\frac{-3+\sqrt{9-64k^2}}{8k}$, decrescente per $\frac{-3-\sqrt{9-64k^2}}{8k}<x<0\ e\ crescente$ per $x>0$; ha quindi tre punti stazionari:

  $x=\frac{-3-\sqrt{9-64k^2}}{8k}$ (minimo relativo), $x=\frac{-3+\sqrt{9-64k^2}}{8k}$ $(massimo\ relativo)$
  ed $x=0$ (minimo relativo).

- **Se $\boldsymbol{k=\frac{3}{8}}$** , la funzione decresce per $x<0$, cresce per $x>0: x=0$
  è punto di minimo relativo (ed anche assoluto). Inoltre $x=-1$ è punto di flesso a tangente orizzontale.

- **Se $\boldsymbol{k>\frac{3}{8}}$** la funzione è decrescente per $x<0$, crescente per $x>0$ ed ha un punto stazionario in $x=0$ che è un punto di minimo relativo (ed anche assoluto).

2)

Tracciare il grafico γ_1 della funzione corrispondente al valore $k=\frac{3}{8}$ determinando, in particolare, le coordinate dei due punti di flesso F_1 e F_2 . Scrivere le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti a γ_1 in F_1 e F_2.

Per $k=\frac{3}{8}$ la funzione ha equazione**:** $\boldsymbol{y=f(x)=\frac{3}{8}x^4+x^3+\frac{3}{4}x^2}$

Dominio: tutto R.

Pari/Dispari: $f(-x)=\frac{3}{8}x^4-x^3+\frac{3}{4}x^2$: né pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani: se $x=0, y=0.\ Se\ y=0.$: $\frac{3}{8}x^4+x^3+\frac{3}{4}x^2=0,$

$3x^4 + 8x^3 + 6x^2 = 0$, $x^2(3x^2 + 8x + 6) = 0$ solo se $x = 0$ (che è soluzione doppia, quindi il grafico è tangente all'asse delle x nell'origine degli assi), perché il discriminante di $3x^2 + 8x + 6 = 0$ è negativo.

Segno della funzione:

$f(x) \geq 0 \quad se \quad x^2(3x^2 + 8x + 6) \geq 0$: la funzione è sempre positiva per ogni $x \neq 0$ (in $x = 0$, come già detto si annulla).

Limiti agli estremi del dominio:

$\lim_{x\to\mp\infty} \left(\frac{3}{8}x^4 + x^3 + \frac{3}{4}x^2\right) = \lim_{x\to\mp\infty} \left(\frac{3}{8}x^4\right) = +\infty$. Notiamo che **non ci sono asintoti orizzontali né obliqui.**

Monotonia:

$f'(x) = \frac{3}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}x(x^2 + 2x + 1) = \frac{3}{2}x(x+1)^2 = 0 \quad$ se $x = 0 \;\; e \; x = -1$. Risulta:

Se $x < -1$: $f'(x) < 0$: funzione decrescente.
Se $x = -1$: $f'(x) = 0$: $x = -1$ punto stazionario
Se $-1 < x < 0$: $f'(x) < 0$: funzione decrescente (quindi $x = -1$ è punto di flesso a tangente orizzontale)
Se $x = 0$: $f'(x) = 0$: $x = 0$ punto stazionario.
Se $x > 0$: $f'(x) > 0$: funzione crescente, $x = 0$ punto di minimo relativo (ed anche assoluto): $m = (0; 0)$

Concavità:

$f''(x) = \frac{9}{2}x^2 + 6x + \frac{3}{2} \geq 0$ se $3x^2 + 4x + 1 \geq 0$; $x_{1,2} = \frac{-2\pm1}{3}$; quindi $x_1 = -1$ e $x_2 = -\frac{1}{3}$.
Pertanto: $f''(x) \geq 0$ se $x \leq -1 \;\; vel \;\; x \geq -\frac{1}{3}$. Per quanto riguarda la concavità:

se $x < -1$: concavità verso l'alto
se $-1 < x < -\frac{1}{3}$: concavità verso il basso ($x = -1$ punto di flesso)
se $-\frac{1}{3} < x < 0$: concavità verso l'alto ($x = -\frac{1}{3}$ punto di flesso)
Se $x > 0$: concavità verso l'alto.

L funzione ha quindi due punti di flesso:

se $x = -1$, $y = \frac{3}{8} - 1 + \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$: $F_1 = \left(-1; \frac{1}{8}\right)$

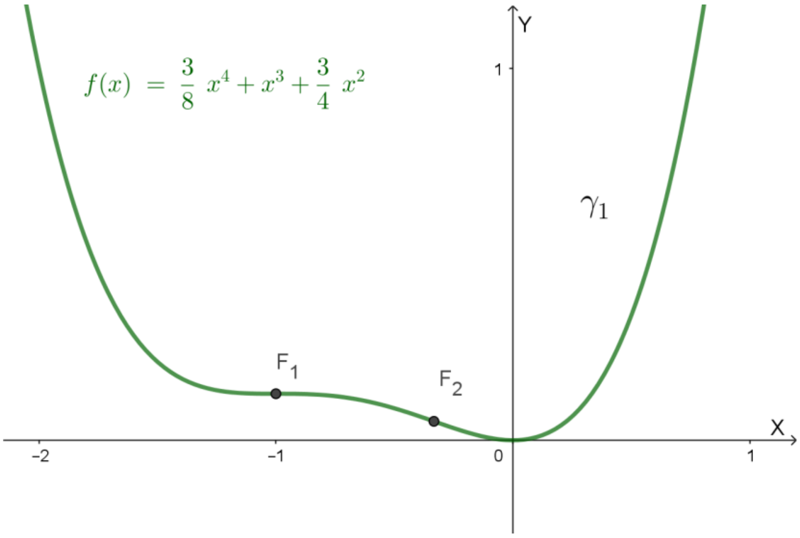
se $x = -\frac{1}{3}$: $y = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{81}\right) - \frac{1}{27} + \frac{1}{12} = \frac{11}{216}$: $F_2 = \left(-\frac{1}{3}; \frac{11}{216}\right)$.

Cerchiamo le equazioni delle tangenti inflessionali. Risulta: $f'(-1) = 0$ ed $f'\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right) = -\frac{2}{9}$.
Pertanto, indicando con t_1 la tangente in F_1 e con t_2 la tangente in F_2, abbiamo:

$t_1: y - \frac{1}{8} = 0, \qquad y = \frac{1}{8}$

$t_2: y - \frac{11}{216} = -\frac{2}{9}\left(x + \frac{1}{3}\right), \;\; y = -\frac{2}{9}x - \frac{5}{216}$

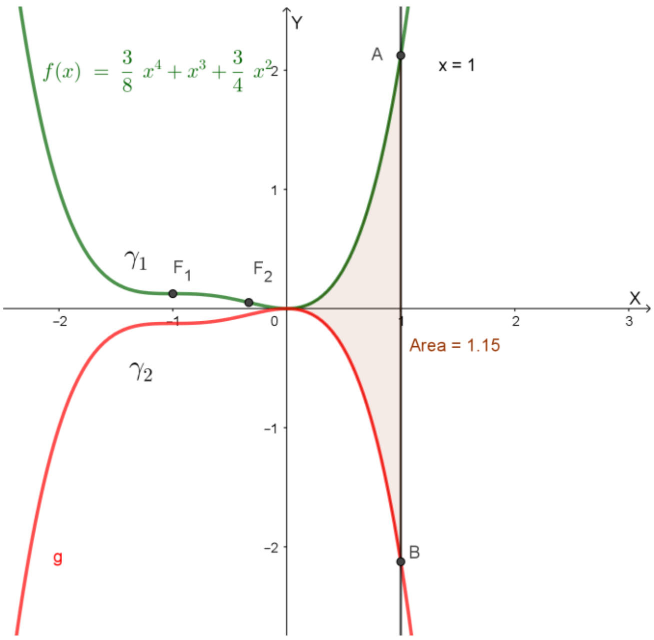
Il grafico è quindi il seguente:



3)

Scrivere l'equazione $y = g(x)$ della funzione simmetrica di f rispetto all'asse delle ascisse e se ne tracci il grafico rappresentativo γ_2 nel medesimo piano cartesiano in cui è tracciato γ_1. Si indichi con R la regione delimitata da γ_1, γ_2 e dalla retta $x = 1$ e se ne calcoli l'area.

L'equazione della funzione g è la seguente: $y = g(x) = -f(x) = -\left(\frac{3}{8}x^4 + x^3 + \frac{3}{4}x^2\right)$. Il suo grafico, insieme a quello della funzione f è il seguente:



L'area della regione R è data da:

$$Area(R) = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 \left(\frac{3}{8}x^4 + x^3 + \frac{3}{4}x^2\right)dx = 2\left[\frac{3}{40}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^3\right]_0^1 =$$

$$= 2\left[\frac{3}{40} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - (0)\right] = \frac{46}{40}\,u^2 \cong 1.15\,u^2 = Area(R)$$

4)

Calcolare, al variare del parametro k, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_k(x)}{sen^k(x)} \qquad\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{f_k(x)}{|sen^k(x)|}$$

Calcoliamo il primo limite, ricordando che $k \geq 0$.

Notiamo che la funzione $y = \frac{f_k(x)}{sen^k(x)}$ ha il numeratore che è sempre definito $(f_k(x) = kx^4 + x^3 + 2kx^2 \;\; con \;\; k \geq 0)$. Il denominatore non è definito (dato che $k \geq 0$ è un numero reale qualsiasi) quando $sen(x) \leq 0$ (si pensi a $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-\frac{1}{2}}$).
Dovendo calcolare il limite per $x \to 0$, non ci interessa che la funzione sia definita in $x = 0$. Per avere $sen(x) > 0$ supponiamo che il limite sia per $x \to 0^+$, così il denominatore è definito in un intorno destro "piccolo a piacere" di $x = 0$, 0 escluso, che è quello che ci interessa per poter calcolare il limite.

Ricordiamo che per $x \to 0^+$, risulta $\sin(x) \sim x$ e quindi (dato che stiamo considerando $sen(x) > 0$), si ha $sen^k(x) \sim x^k$. Pertanto:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f_k(x)}{sen^k(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{kx^4+x^3+2kx^2}{sen^k(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2kx^2}{x^k}.$$

Si hanno i seguenti casi:

1) Se $k = 2$ il limite è 4
2) Se $0 \leq k < 2$ il limite è 0^+ (il numeratore è infinitesimo di ordine superiore)
3) Se $k > 2$ il limite è $+\infty$ (il numeratore è infinitesimo di ordine inferiore)

Calcoliamo il secondo limite, ricordando che $k \geq 0$.

In questo caso le cose sono più complicate. Infatti, come nel caso precedente, per poter calcolare $sen^k(x)$ per ogni numero reale deve essere $sen(x) > 0$, cioè $2h\pi < x < \pi + 2h\pi$, con $h \in \mathbb{Z}$. Quindi la funzione di cui dobbiamo calcolare il limite non esiste in TUTTO un intorno di $+\infty$ (cioè per ogni numero reale $x > N$) né in TUTTO un intorno di $-\infty$ (cioè per ogni numero reale $x < -N$).

Questo fatto pone dei grossi problemi se vogliamo applicare la definizione “semplificata” di limite che viene normalmente data dai libri di testo usati nei Licei. Infatti, di solito, prima di dare la definizione di limite per $x \to c$, si dice che c deve essere (ovviamente) un punto di accumulazione per il dominio D della funzione, con $D \subseteq \mathbb{R}$, e si aggiunge che la funzione sia definita in un intorno I di c (al più escluso c).

Quando si dà la definizione di limite per $x \to +\infty$ si suppone che la funzione sia definita in un intorno I di $+\infty$ (quindi in un intervallo del tipo $x > N$) ed analogamente, quando si dà la definizione di limite per $x \to -\infty$ si suppone che la funzione sia definita in un intorno I di $-\infty$ (quindi in un intervallo del tipo $x < -N$). Quando infine si da la definizione di limite per $x \to \infty$ si suppone che la funzione sia definita in un intorno di ∞ (cioè per tutti gli x che soddisfano una disequazione del tipo $|x| > N$, con $N > 0$, che equivale a $x < -N \ \cup x > N$).

Secondo la definizione che abbiamo richiamato (quella data normalmente nei Licei), il $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{kx^4+x^3+2kx^2}}{|\mathrm{sen^k(x)}|}$ NON ESISTE, perché non esiste un intorno I di ∞ in cui la funzione sia sempre definita.

La definizione più generale di limite (che non viene normalmente utilizzata al Liceo), prevede che la funzione sia definita in $I(\infty) \cap D$, cioè nei punti di un intorno di ∞ che appartengono al dominio D della funzione. Le due definizioni che si possono dare (limite finito e limite infinito) sono del tipo seguente.

Definizione generale di limite finito all’infinto:

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un in un sottoinsieme D di numeri reali ($D \subseteq \mathbb{R}$), si dice che

$f(x) \to l$ per $x \to \infty$, e si scrive $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$, se:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ I_\epsilon(\infty) / \ \ \forall x \in I \cap D \ si \ ha: |f(x) - l| < \varepsilon$

Detto a parole: fissato un $\varepsilon > 0$ (piccolo quanto si vuole, ma questa frase, di uso comune, è superflua), esiste in corrispondenza di esso un numero reale $N > 0$ tale che, **per ogni x del dominio D** della funzione per cui si abbia $|x| > N$ (equivalente a $x < -N \ \cup \ X > N$) risulti: $|f(x) - l| < \varepsilon$ (equivalente a $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$).

Definizione generale di limite infinito all’infinto:

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un in un sottoinsieme D di numeri reali ($D \subseteq \mathbb{R}$), si dice che

$f(x) \to \infty$ per $x \to \infty$, e si scrive $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, se:

$\forall M > 0 \ \exists \ I_M(\infty) / \ \ \forall x \in I \cap D \ si \ ha: |f(x)| > M$

Detto a parole: fissato un $M > 0$ (grande quanto si vuole, ma anche questa frase, di uso comune, è superflua), esiste in corrispondenza di esso un numero reale $N > 0$ tale che, **per ogni x del dominio D** della funzione per cui si abbia $|x| > N$ (equivalente a
$x < -N \ \cup \ X > N$) risulti: $|f(x)| > M$ (equivalente a $f(x) < -M \ \cup f(x) > M$).

Fatta questa doverosa estensione della definizione di limite, per calcolare $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{kx^4+x^3+2kx^2}}{|\mathrm{sen^k(x)}|}$ analizziamo due casi, ricordando che il dominio D della funzione è **tutto l’asse reale privato degli (infiniti) intervalli** del tipo $\pi + 2h\pi \leq x \leq 2\pi + 2h\pi$, con $h \in \ \mathbb{Z} \ e \ h \geq 0$ e $-\pi - 2h\pi \leq x \leq -2h\pi$, con $h \in \ \mathbb{Z} \ e \ h \geq 0$ e che in D risulta $sen(x) > 0$ affinché abbia senso la potenza ad esponente reale $\mathrm{sen^k(x)}$.

Primo caso: $\boldsymbol{k > 0}$

In questo caso, essendo $sen\ x > 0$ risulta $0 < sen\ x \leq 1$ e quindi $0 < \left|\mathrm{sen}^{\mathrm{k}}(\mathrm{x})\right| \leq 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{kx^4+x^3+2kx^2}}{|\mathrm{sen^k(x)}|} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{kx^4}}{|\mathrm{sen^k(x)}|} = \left[\frac{+\infty}{quantità\ che\ oscilla\ fra\ 0\ escluso\ ed\ 1\ compreso}\right] = +\infty.$$

N.B. Siccome $0 < \left|\mathrm{sen}^{\mathrm{k}}(\mathrm{x})\right| \leq 1$ risulta $\frac{\mathrm{kx^4}}{|\mathrm{sen^k(x)}|} \geq kx^4$ che tende a $+\infty$, quindi anche $\frac{\mathrm{kx^4}}{|\mathrm{sen^k(x)}|} \to +\infty$.

In conclusione: $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{kx^4+x^3+2kx^2}}{|\mathrm{sen^k(x)}|} = +\infty$ (per ogni $k > 0$).

Secondo caso $\boldsymbol{k = 0}$

Anche in questo caso, essendo $sen\ x > 0$ risulta $0 < sen\ x \leq 1$ e quindi $\mathrm{sen^k(x)} = sen^0(x) = 1$.

Il limite diventa: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{sen^0(x)} = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$

In conclusione: se $k = 0$ il limite è ∞ (precisamente $-\infty$ se $x \to -\infty$ e $+\infty$ se $x \to +\infty$).

Osservazione sul secondo limite

Se al denominatore invece di $\left|\mathrm{sen}^{\mathrm{k}}(\mathrm{x})\right|$ ci fosse stato $|\mathrm{sen(x)}|^k$ la discussione sarebbe stata più semplice, perché avremmo evitato i casi in cui $sen(x) < 0$, quindi il dominio D sarebbe stato tutto l'asse reale privato dei punti $x = h\pi$, con $h \in \mathbb{Z}$. Sarebbe stato comunque necessario lo stesso utilizzare la definizione "generale" di limite, perché anche in tal caso la funzione non sarebbe stata definita in TUTTO un intorno di ∞.

Con la collaborazione di Angela Santamaria