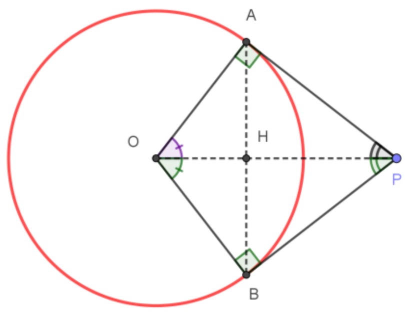
LICEO SCIENTIFICO AUSTRALE 2 ORDINARIA 2023 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

Data una circonferenza di centro O, siano PA e PB i segmenti di tangente alla circonferenza condotti da un suo punto esterno P. Dimostrare che il quadrilatero AOBP ha le diagonali perpendicolari.



Osserviamo che i triangoli rettangoli OAP e OBP sono congruenti, avendo l'ipotenusa OP in comune ed i cateti OA ed OB congruenti perché raggi della stessa circonferenza. Segue che gli angoli corrispondenti AOP e BOP sono congruenti. Il triangolo AOP è isoscele sulla base AB (OA ed OB congruenti). OH è la bisettrice dell'angolo al vertice O, pertanto, per una nota proprietà dei triangoli isosceli, OH è anche altezza relativa alla base AB: pertanto OP ed AB sono perpendicolari c.v.d.

QUESITO 2

È data un'urna contenente 10 palline bianche e 6 palline nere. Calcolare la probabilità che:

- *Estraendo una pallina, sia di colore nero;*
- *Estraendo due palline contemporaneamente, siano entrambe di colore nero;*
- *Estraendo due palline contemporaneamente, siano di colore diverso.*

Calcoliamo la probabilità che, estraendo una pallina, sia di colore nero.

$$p = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\ \%$$

Calcoliamo la probabilità che, estraendo due palline contemporaneamente, siano entrambe di colore nero.

Il numero di coppie favorevoli è dato da: $C_{6,2} = \binom{6}{2} = 15.$
Il numero di coppie possibili è dato da: $C_{16,2} = \binom{16}{2} = 120.$

Quindi: $p = \frac{15}{120} = \frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\ \%.$

Calcoliamo la probabilità che estraendo due palline contemporaneamente, siano di colore diverso.

Il numero di coppie favorevoli è dato da: $10 \cdot 6 = 60$.
Il numero di coppie possibili è dato da: $C_{16,2} = \binom{16}{2} = 120$.

Quindi: $p = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} = 0.50 = 50\ \%$.

QUESITO 3

Determinare le coordinate della proiezione ortogonale H del punto $A(4, -1, 1)$ sul piano π: $3x - 2y + z = 1$. Determinare le equazioni cartesiane del luogo geometrico dei punti di π che hanno distanza $3\sqrt{2}$ da A.

H è l'intersezione fra la normale n al piano π passante per A ed il piano stesso. La normale ha vettore (3; -2; 1), che sono i coefficienti di x, y e z dell'equazione del piano. Essa ha quindi equazioni parametriche:

$$n: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Intersecando col piano π: $3x - 2y + z = 1$ otteniamo:

$$3(4 + 3t) - 2(-1 - 2t) + (1 + t) = 1, 14t + 15 = 1, t = -1: H = (1,1,0)$$

Determiniamo le equazioni cartesiane del luogo geometrico dei punti di π che hanno distanza $3\sqrt{2}$ da A.

Il luogo si ottiene intersecando la sfera S di centro A e raggio $3\sqrt{2}$ con π, quindi sarà una circonferenza del piano dato.

$$S: \ (x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 18; \ x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 2z = 0$$

Il luogo richiesto è quindi la circonferenza (con centro in H) di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

N.B.

Indicato con $r = \overline{HP}$ (con P punto della circonferenza appartenente al piano e alla sfera) il raggio della circonferenza, con R quello della sfera, con H il centro della circonferenza, risulta:

$$r^2 = \overline{HP}^2 = \overline{AP^2} - \overline{AH}^2$$

Infatti il triangolo AHP è rettangolo in H. Calcoliamo $\overline{AH}$, distanza di A dal piano π:

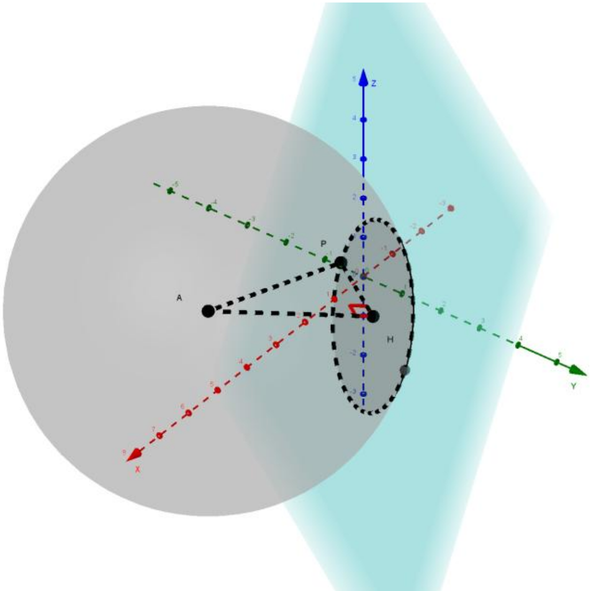
$$\overline{AH} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|12 + 2 + 1 - 1|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

Pertanto:

$$r^2 = \overline{AP^2} - \overline{AH}^2 = R^2 - \left(\sqrt{14}\right)^2 = 18 - 14 = 4.$$

Quindi $r = 2$.

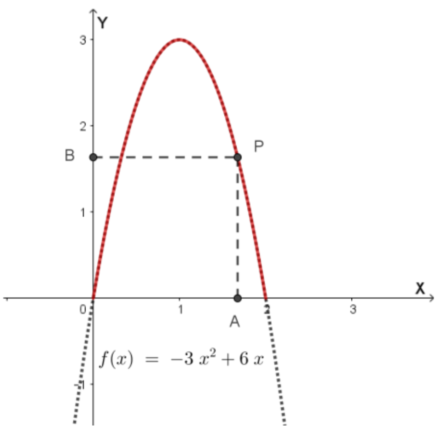
Il luogo geometrico dei punti di π che hanno distanza $3\sqrt{2}$ da A è la circonferenza del piano π di centro $H = (1,1,0)$eraggio2.



QUESITO 4

È data la parabola di equazione $f(x) = -3x^2 + 6x$. Determinare le coordinate del punto P appartenente alla porzione di curva $f(x)$ nel I quadrante tale che sia massimo il prodotto delle distanze di P dagli assi cartesiani.

La parabola ha asse verticale, vertice $(1; 3)$, taglia l'asse delle x in (0; 0) e (2; 0), e l'asse delle y in (0; 0).



Posto $P = (x;\ -3x^2 + 6x)$, con $0 \le x \le 2$ ed indicati con A e B le proiezioni di P sugli assi cartesiani, deve essere:

$$y = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = max$$

Risulta: $y = |x| \cdot |-3x^2 + 6x| = x(-3x^2 + 6x), con\ 0 \leq x \leq 2$.

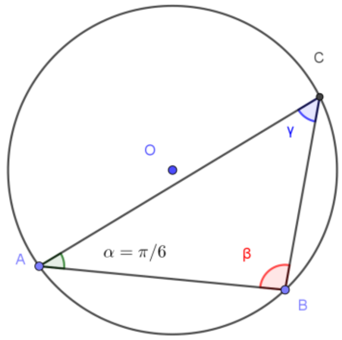
$y = -3x^3 + 6x^2,\ y' = -9x^2 + 12x \geq 0\ \ se\ \ 3x^2 - 4x \leq 0: 0 \leq x \leq 4/3$. Pertanto:
y cresce per $0 \leq x < \frac{4}{3}x$ e decresce per $\frac{4}{3} < x \leq 2$. Quindi y è $massima\ se\ x = \frac{4}{3}$. Per tale valore di x si ha $y = \frac{4}{3}\left(-\frac{16}{3} + 8)\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{32}{9}$. Perciò:

Le coordinate del punto P appartenente alla porzione di curva $f(x)$ nel I quadrante tale che sia massimo il prodotto delle distanze di P dagli assi cartesiani sono: $\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Il massimo prodotto è uguale a $\frac{32}{9}$.

QUESITO 5

Gli angoli di un triangolo, inscritto in una circonferenza di raggio 7 m, hanno ampiezze α, β e γ. Sapendo che $\alpha = \frac{\pi}{6}$ e che $cos\beta = \frac{1}{7}$, determinare il valore di $sen\gamma$ e l'area del triangolo ABC.

Rappresentiamo il triangolo inscritto nella circonferenza:



Dati: $R = 7,\ \alpha = \frac{\pi}{6}, \cos\beta = \frac{1}{7}$.

Risulta: $\gamma = \pi - \frac{\pi}{6} - \beta = \frac{5}{6}\pi - \beta$, quindi:

$$sen\,\gamma = sen\,\left(\frac{5}{6}\pi - \beta\right) = sen\,\frac{5}{6}\pi\cos\beta - \cos\frac{5}{6}\pi\ sen\,\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\ sen\,\beta.$$

Calcoliamo $sen\,\beta$ (che è > 0, perché $0 < \beta < \pi/2$, essendo $\cos\beta$ positivo):

$$sen\,\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4}{7}\sqrt{3}$$

Quindi:

$$sen\,\gamma = \frac{1}{14} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{4}{7}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{14} + \frac{12}{14} = \frac{13}{14} = sen\,\gamma$$

Il valore di $sen\gamma$ è $\frac{13}{14}$.

Calcoliamo l'area del triangolo ABC.

Per il Teorema della corda si ha: $\overline{BC} = 2R\, sen\, \alpha = 14 \cdot \frac{1}{2}\, m = 7\, m = \overline{BC}$ (a conferma che BC è una corda che insiste su un angolo alla circonferenza uguale a $\frac{\pi}{6}$, quindi $\overline{BC} = \text{R}$).
Per lo stesso Teorema si ha:

$\overline{AB} = 2R\, sen\, \gamma = 14 \cdot \dfrac{13}{14} = 13\, m$
Quindi:
$Area(ABC) = \dfrac{1}{2}\, \overline{AB} \cdot \overline{BC}\, sen\, \beta = \dfrac{1}{2}(13)(7)\left(\dfrac{4}{7}\sqrt{3}\right) = 26\,\sqrt{3}\, m^2$

L'area del triangolo ABC è $26\,\sqrt{3}\, m^2$.

QUESITO 6

Assegnata la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, *determinare i valori dei parametri reali in modo che passi per* $A(-1,-3), B(1,-1)$ *e risulti tangente in* $C(0,1)$ *alla retta* t: $y = 2x + 1$. *Determinare infine le coordinate dell'ulteriore punto* Q *di intersezione tra la curva e la retta* t.

Passaggio per $A(-1,-3)$: $-3 = -a + b - c + d$
Passaggio per $B(1,-1)$: $-1 = a + b + c + d$
Passaggio per $C(0,1)$: $1 = d$

Per essere tangente a t: $y = 2x + 1$ in $C(0,1)$, deve essere $f'(0) = 2$. Ma è: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ quindi: $2 = c$.
Abbiamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} -3 = -a + b - c + d \\ -1 = a + b + c + d \\ 1 = d \\ 2 = c \end{cases} ; \quad \begin{cases} -3 = -a + b - 2 + 1 \\ -1 = a + b + 2 + 1 \\ 1 = d \\ 2 = c \end{cases} ; \quad \begin{cases} -2 = -a + b \\ -4 = a + b \\ 1 = d \\ 2 = c \end{cases} ; \ \dots \quad \begin{cases} -3 = b \\ -1 = a \\ 1 = d \\ 2 = c \end{cases}$$

La curva assegnata ha quindi equazione: $y = -x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

Determiniamo le coordinate dell'ulteriore punto Q di intersezione tra la curva e la retta t.

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \end{cases} ; \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2x + 1 = -x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda equazione:

$x^3 + 3x^2 = 0 :\ \ x = 0\ (doppia) e\ x = -3$.

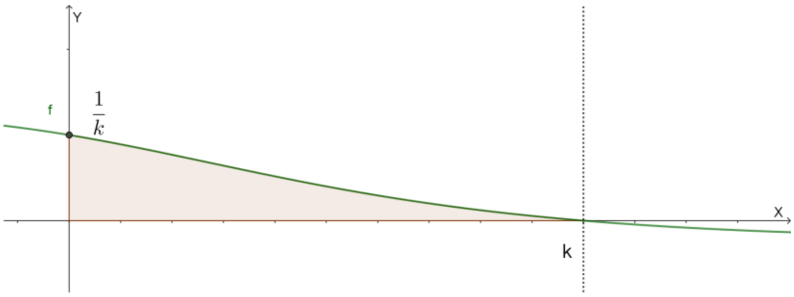
Con $x = 0$ otteniamo $C(0,1)$, con $x = -3$ otteniamo $Q = (-3; -5)$

L'ulteriore punto Q di intersezione tra la curva e la retta t è quindi: $Q = (-3;\ -5)$.

QUESITO 7

Dimostrare che la regione finita di piano contenuta nel primo quadrante, delimitata dagli assi cartesiani e dalla curva $y = \frac{k-x}{x^2+k^2}$ *con* $k > 0$, *ha area costante pari a* $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

La curva taglia l'asse delle ascisse in $x = k > 0$ e l'asse delle ordinate in $y = \frac{1}{k}$.
Inoltre $y > 0$ per $x < k$. La regione richiesta è del tipo:



Quindi l'area si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_0^k \frac{k-x}{x^2+k^2}\,dx = \int_0^k \frac{k}{x^2+k^2}\,dx - \int_0^k \frac{x}{x^2+k^2}\,dx$$

Cerchiamo una primitiva di $y = \frac{k}{x^2+k^2}$:

$$\int \frac{k}{x^2+k^2}\,dx = \int \frac{k}{k^2\left(1+\frac{x^2}{k^2}\right)}\,dx = \int \frac{1}{k\left(1+\left(\frac{x}{k}\right)^2\right)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{k}}{1+\left(\frac{x}{k}\right)^2}\,dx = arctg\left(\frac{x}{k}\right) + c$$

Cerchiamo una primitiva di $y = \frac{x}{x^2+k^2}$

$$\int \frac{x}{x^2+k^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+k^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+k^2) + h$$

Pertanto:

$$Area = \int_0^k \frac{k-x}{x^2+k^2}\,dx = \int_0^k \frac{k}{x^2+k^2}\,dx - \int_0^k \frac{x}{x^2+k^2}\,dx = \left[arctg\left(\frac{x}{k}\right)\right]_0^k - \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+k^2)\right]_0^k =$$

$$= arctg(1) - 0 - \left[\frac{1}{2}l\,n(2k^2) - \frac{1}{2}lnk^2\right] = \frac{\pi}{4} - \left[\ln\sqrt{(2k^2)} - \ln k\right] = \frac{\pi}{4} - \left(ln\sqrt{2} + ln\sqrt{(k^2)} - lnk\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(ln\sqrt{2} + \ln k - \ln k\right) = \frac{\pi}{4} - ln\sqrt{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} = Area \quad c.v.d$$

QUESITO 8

Data la funzione $f(x) = \frac{a}{1+be^{-cx}}$ *con* $a > 0$ *,* $b > 0$ *e* $c > 0$*, determinare* a, b, c *sapendo che* $f(x)$ *ha come asintoto orizzontale la retta* $y = 5$ *e che il grafico di* $f(x)$ *è tangente, in* $x = 0$*, alla retta di equazione* $y = \frac{2}{5}x + 1$.

Risulta:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{a}{1+be^{-cx}} = \left[\frac{a}{1+be^{+\infty}}\right] = \left[\frac{a}{+\infty}\right] = 0 \text{ (per } x \to -\infty\ y = 5 \text{ non è asintoto orizzontale)}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a}{1+be^{-cx}} = \left[\frac{a}{1+be^{-\infty}}\right] = \left[\frac{a}{1+0}\right] = a$$

Quindi, affinché ci sia l'asintoto orizzontale $y = 5$, deve essere $a = 5$ (l'asintoto orizzontale c'è solo per $x \to +\infty$).

Dall'equazione della retta $y = \frac{2}{5}x + 1$ troviamo che per $x = 0$ si ha $y = 1$. Quindi il punto di tangenza è $T = (0; 1)$. Il grafico di $f(x) = \frac{a}{1+be^{-cx}}$ deve quindi passare per tale punto: $1 = \frac{a}{1+b} = \frac{5}{1+b}$,
$1 + b = 5$, *quindi* $b = 4$.

Perciò la funzione ha equazione del tipo: $f(x) = \frac{5}{1+4e^{-cx}}$.

Siccome il grafico di $f(x)$ deve essere tangente alla retta data in $T = (0; 1)$, si ha:
$f'(0) = \frac{2}{5} = m(retta)$.
Ma:
$f'(x) = \frac{-5(-4ce^{-cx})}{(1+4e^{-cx})^2}$ *ed* $f'(0) = \frac{20c}{25} = \frac{2}{5}$, perciò: $c = \frac{1}{2}$.

Risulta quindi: $a = 5$, $b = 4$ *e* $c = \frac{1}{2}$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria