Sessione straordinaria 2023
Seconda prova scritta

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri la famiglia di funzioni $f_n(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^n}$ con $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.

a) Verificare che tutte le curve rappresentate dalle funzioni della famiglia $f_n(x)$ passano per uno stesso punto e scrivere le sue coordinate. Determinare, in funzione del parametro *n*, le ascisse degli estremi e dei flessi e calcolarne il limite, con n→ ∞. Scrivere le equazioni degli asintoti e tracciare i grafici delle funzioni f_n , evidenziando le differenze tra i casi in cui *n* è pari da quelli in cui *n* è dispari.

b) Si assuma $n = 3$, studiare la funzione $f_3(x)$ e si tracciare un suo grafico rappresentativo, dimostrando che ammette un unico zero di segno negativo. Discutere, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f_3(x) = k$.

c) Si consideri la funzione $g(x) = 2 - \frac{3}{x}$ e verificare che, $\forall x > 0$, vale la disuguaglianza $f_n(x) > g(x)$, indipendentemente dal valore di n. Si consideri l'integrale

$$I(t) = \int_1^t (f_n(x) - g(x))dx ,$$

che esprime l'area della regione delimitata dai grafici delle funzioni f_n e g e dalle rette di equazioni $x = 1$ e $x = t,\ t > 1$. Si calcolino $I(t)$ e il $\lim_{t\to+\infty} I(t)$, fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

d) Calcolare il $\lim_{x\to\infty} \frac{f_n(x)-2}{g(x)-2}$

e verificare che il risultato non dipende da $n \in N, n > 1$.

PROBLEMA 2

Si considerino le famiglie di funzioni $f_a(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})$ e $g_a(x) = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax})$ con *a* parametro reale positivo.

a) Si traccino, al variare del parametro, i grafici rappresentativi γ_f e γ_g delle funzioni $f_a(x)$ e $g_a(x)$ evidenziando simmetrie, estremi e flessi.

b) Siano P e Q due punti, rispettivamente su γ_f e γ_g, aventi la stessa ascissa positiva, P' e Q' le loro proiezioni sull'asse delle ordinate. Si individui il valore del parametro a in corrispondenza del quale la massima area del rettangolo $PQQ'P'$ vale e^{-1} .

D'ora in avanti, si assuma $a = 1$.

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

c) Verificare l'identità $g^2(x) - f^2(x) = 1$ e determinare il numero intero per cui $50 \leq g(x) - f(x) \leq 100$. Specificare quale, tra $f(x)$ e $g(x)$, è una funzione invertibile in $\mathbb{R}$ e ricavare l'espressione analitica della funzione inversa.

d) Determinare l'equazione $y = P(x)$ della parabola γ avente il vertice nel punto di minimo assoluto della funzione $g(x)$ e retta tangente, per $x = 1$, parallela alla retta di equazione $2x + y = 0$. Calcolare l'area della regione finita *R* delimitata da γ, dal grafico di $g(x)$ e dalle rette di equazione $x = \pm 1$. Verificare che l'area di *R* può essere approssimata con quella del triangolo isoscele inscritto nel segmento parabolico delimitato da γ e dall'asse delle ascisse.

QUESITI

1. Nel triangolo *ABC*, l'ampiezza di uno dei tre angoli è la metà di un secondo angolo del triangolo ed è pari al triplo del terzo angolo. Detti *A'*, *B'*, *C'* i punti di tangenza tra i lati di *ABC* ed il suo cerchio inscritto, determinare le ampiezze degli angoli del triangolo *A'B'C'*.

2. Una classe è formata da 18 studenti; durante la lezione di musica, vengono creati (in modo completamente casuale) tre gruppi formati rispettivamente da 5, 6 e 7 studenti. Se Alice, Barbara e Chiara sono tre studentesse della classe, determinare la probabilità che solo due di loro facciano parte di uno stesso gruppo.

3. Assegnate le rette $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$, $s : \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$ con *t* parametro reale, determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo ad s.

4. Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata di diagonale fissata *d*, dimostrare che il cubo è quello di volume massimo.

Sessione straordinaria 2023
Seconda prova scritta

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

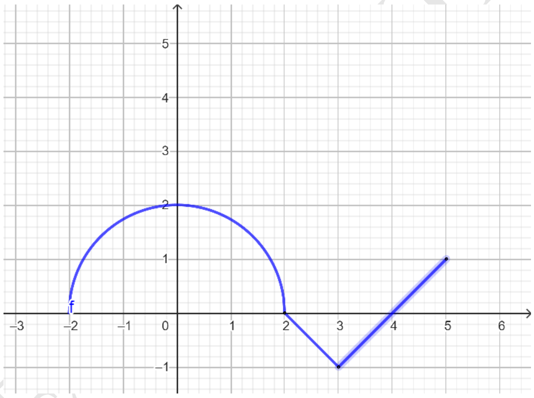
Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

5. Determina l'equazione della funzione dispari che ha un solo flesso a tangente orizzontale e la cui derivata seconda è $f'' = -10x^3 + 12x$.

6. Si consideri la funzione $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$ con $x \in [-2;5]$, dove f è la funzione rappresentata in figura, ottenuta dall'unione di una semicirconferenza e due segmenti.

   Calcolare $F(-2)$, $F(2)$, $F(3)$ e $F(5)$.



7. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \frac{x\,|x+1|}{x^3 - x}$ e stabilire la tipologia delle sue discontinuità.

8. Si considerino le seguenti affermazioni sulla funzione $y = f(x)$.

   A: "$f(x)$ è derivabile per $x = x_0$"

   B: "$f(x)$ è continua per $x = x_0$"

   Indicare quali, tra le seguenti affermazioni, non costituisce un teorema. Spiegare la scelta effettuata anche attraverso opportuni controesempi.

   A $\Longrightarrow$ B (*Se A allora B*)

   B $\Longrightarrow$ A (*Se B allora A*)

   A $\Longleftrightarrow$ B (*B se e solo se A*)

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico. (Nota MIM n. 9305 del 20 marzo 2023).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.