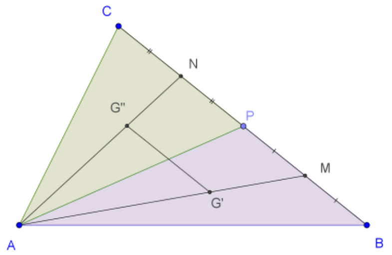
LICEO SCIENTIFICO SUPPLETIVA 2023 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

Dato un triangolo ABC, sia P un punto del lato BC e siano G' e G'' i baricentri dei triangoli ABP e ACP. Dimostrare che il segmento G'G'' è parallelo a BC.



Per una nota proprietà del baricentro di un triangolo si ha: $AG' = 2G'M \; e \; AG'' = 2G''N$. Quindi:

$$\frac{AG'}{G'M} = \frac{AG''}{G''N} = 2$$

Pertanto, per l'inverso del Teorema di Talete, le rette $G'G'' e \; BC$ sono parallele, c.v.d.

QUESITO 2

Un dado regolare a 6 facce viene lanciato 8 volte. Qual è la probabilità di ottenere tre volte la faccia "5"? Qual è la probabilità di ottenere la faccia "5" per la terza volta all'ottavo lancio?

Indichiamo con E l'evento: "nel lancio di un dado regolare a 6 facce esce il 5". Risulta chiaramente:

$p(E) = \frac{1}{6}$, $q = 1 - p = \frac{5}{6}$ $(probabilità \; che \; NON \; si \; verifichi \; l'evento E)$.

Ponendo $n = 8 \; e \; k = 3$, si tratta di calcolare la "probabilità binomiale"

$$p(k,n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = p(3,8) = \binom{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 56 \cdot \frac{5^5}{6^8} = \frac{21875}{209952} \cong 0.104 = 10.4\,\% \,.$$

Quindi: la probabilità di ottenere 3 volte 5 lanciando il dado 8 volte è $\frac{21875}{209952} \cong 0.104 = 10.4\,\%$.

Calcoliamo ora la probabilità di ottenere la faccia 5 per la terza volta all'ottavo lancio.
Ciò equivale a calcolare la probabilità che in 7 lanci il 5 esca 2 volte e moltiplicare tale valore per $\frac{1}{6}$ (probabilità che all'ottavo lancio esca il 5). Si ha (applicando ancora la probabilità binomiale):

$p(2,7) = \binom{7}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 21 \cdot \frac{5^5}{6^7}$.

La probabilità richiesta è quindi:

$$\left(21 \cdot \frac{5^5}{6^7}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{21875}{559872} \cong 0.039 = 3.9\ \%$$

QUESITO 3

Determinare le equazioni delle superfici sferiche di raggio $R = 5\sqrt{2}$ tangenti nel punto $P(-1,2,3)$ al piano di equazione $3x + 4y - 5z + 10 = 0$.

I centri delle sfere appartengono alla normale n in P al piano tangente, che ha equazioni parametriche:

n: $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$

I centri C si ottengono imponendo che il generico punto della normale disti $R = 5\sqrt{2}$ da P:

$CP = 5\sqrt{2}$, $\quad CP^2 = 50$, $\quad (-1 + 3t + 1)^2 + (2 + 4t - 2)^2 + (3 - 5t - 3)^2 = 50$,

$9t^2 + 16t^2 + 25t^2 = 50$, $\quad 50t^2 = 50$, $\quad t = \pm 1$

Quindi i centri delle (due) sfere hanno coordinate: $C_1 = (2; 6; -2)$, $C_2 = (-4; -2; 8)$.

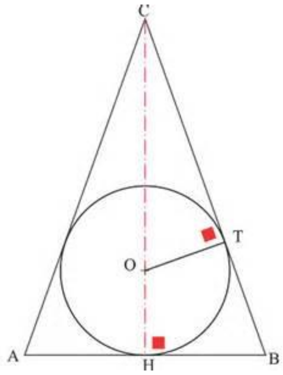
Le sfere richieste S_1 *ed* S_2 hanno quindi equazioni:

S_1: $(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = 50$; S_2: $(x+4)^2 + (y+2)^2 + (z-8)^2 = 50$

QUESITO 4

Una sfera, di raggio R fissato, è inscritta nel cono S di volume minimo. Qual è la distanza del vertice del cono dalla superficie della sfera?

Indichiamo con R il raggio della sfera.



Poniamo l'altezza CH del cono uguale ad x: CH=x, con x>2R. Per la similitudine fra i triangoli HBC e TCO risulta:

CT:OT=CH:BH ; inoltre: $CT = \sqrt{OC^2 - OT^2} = \sqrt{(x-R)^2 - R^2} = \sqrt{x^2 - 2Rx}$

Pertanto:

$$\sqrt{x^2 - 2Rx} : R = x : BH \quad , \quad BH = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 - 2Rx}} = \frac{R\sqrt{x^2 - 2Rx}}{x - 2R}$$

Il volume del cono è pertanto:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot BH^2 \cdot CH = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2 x}{x-2R} \cdot x = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2 x^2}{x-2R}, \quad con\ x > 2R$$

Tale volume è minimo se lo è:

$$y = \frac{x^2}{x-2R}$$

$$y' = \frac{x(x-4R)}{(x-2R)^2} \geq 0 \quad se \quad x \geq 4R$$

Quindi y è crescente se $x > 4R$ e decrescente se $0 < x < 4R$: $x = 4R$ è punto di minimo assoluto.

Il volume del cono S circoscritto ad una sfera di raggio dato R è minimo quando la sua altezza è uguale a 4R; il volume del cono vale in tal caso $\frac{8}{3}\pi R^3$.

La distanza d del vertice C del cono dalla sfera si ottiene sottraendo all'altezza CH del cono il diametro 2R della sfera. Quindi:

$$d = CH - 2R = 4R - 2R = 2R$$

QUESITO 5

Determinare il valore del parametro reale k in modo che la retta di equazione cartesiana $y = x - 2$ risulti tangente alla curva $y = x^3 + kx$.

Ricordiamo che due curve di equazione $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sono tangenti se:

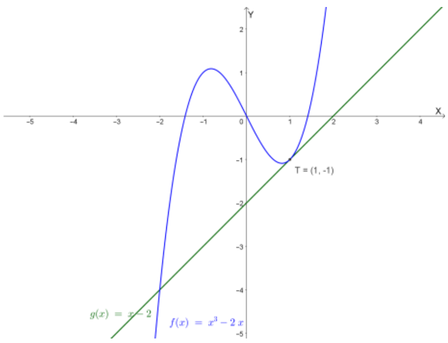
$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^3 + kx = x - 2 \\ 3x^2 + k = 1 \Rightarrow k = 1 - 3x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad x^3 + (1 - 3x^2)x - x + 2 = 0$$

$-2x^3 + 2 = 0\,;\ \ x^3 = 1\,, \qquad x = 1\,, \qquad quindi\ k = -2$

Situazione grafica (non richiesta):



QUESITO 6

Scrivere una funzione polinomiale $y = p(x)$ di terzo grado che si annulli solo per $x = 0$ e per $x = 3$, il cui grafico sia tangente all'asse x in un punto e passi per $P(1, -4)$. Determinare l'area della regione piana limitata compresa tra l'asse x ed il grafico della funzione polinomiale individuata.

La funzione, per annullarsi SOLO in 0 e 3 deve essere del tipo:

$p(x) = a\, x^2(x-3)$ OPPURE $p(x) = b\, x(x-3)^2$

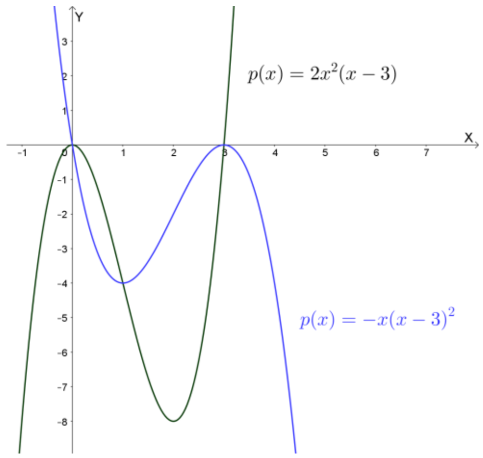
Nel primo caso è tangente all'asse x in x=0, nel secondo in x=3.

Imponiamo il passaggio per $P(1;\ -4)$:

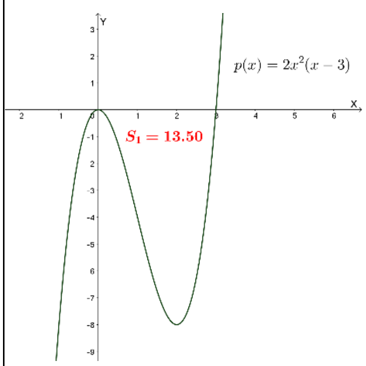
se $p(x) = a\, x^2(x-3)$ allora : $-4 = -2a,\ quindi\text{:}\ a = 2 \Rightarrow$ $p(x) = 2x^2(x-3)$

$p(x) = b\, x\,(x-3)^2$ allora: $-4 = 4b\,,\ quindi\ b = -1 \Rightarrow$ $p(x) = -x(x-3)^2$

Grafici (non richiesti):

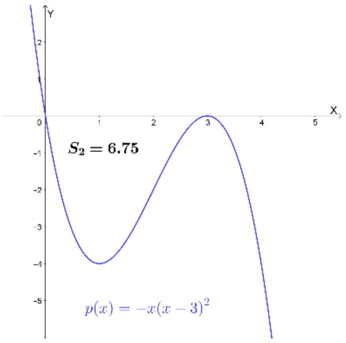


Scegliendo $p(x) = 2x^2(x-3) = 2x^3 - 6x^2$ l'area della regione S_1,richiesta è data da:



$$-\int_0^3 (2x^3 - 6x^2)dx = -\left[\frac{1}{2}x^4 - 2x^3\right]_0^3 = \frac{81}{2} - 54 = \frac{27}{2} = 13.50\ u^2$$

Scegliendo $p(x) = -x(x-3)^2 = -x^3 + 6x^2 - 9x$ l'area della regione richiesta è data da:



$$-\int_0^3 (-x^3 + 6x^2 - 9x)dx = -\left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{9}{2}x^2\right]_0^3 = \cdots = \frac{27}{4} = 6.75\ u^2$$

QUESITO 7

Calcolare

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x (t^2-1)\cdot e^{2t}\,dt}{(x-1)^2}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. La funzione al numeratore è continua e derivabile per ogni x (per il Teorema fondamentale del calcolo integrale); la funzione al denominatore è continua e derivabile per ogni x con derivata non nulla in un intorno di 1 (1 escluso): sono pertanto soddisfatte le ipotesi del Teorema di De l'Hospital. Calcoliamo il limite del rapporto delle derivate (per la derivata del numeratore applichiamo il già citato Teorema fondamentale del calcolo integrale):

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)e^{2x}}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)e^{2x}}{2} = e^2$$

Risulta quindi:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x (t^2-1)\cdot e^{2t}\,dt}{(x-1)^2} = e^2$$

QUESITO 8

Sia f una funzione reale di variabile reale continua e derivabile in un intervallo (a,b). Si considerino le seguenti affermazioni A: "f ha un punto di massimo o di minimo locale in $x_0 \in (a,b)$ e B: "$\exists\, x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0) = 0$". Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono vere per ogni f funzione continua e derivabile in un intervallo (a,b).

1. $A \Longrightarrow B$
2. $B \Longrightarrow A$
3. $A \Longleftrightarrow B$
4. $B \Longleftrightarrow A$

Motivare opportunamente la risposta facendo riferimento a teoremi o controesempi.

La risposta corretta è la 1), per il Teorema di Fermat.

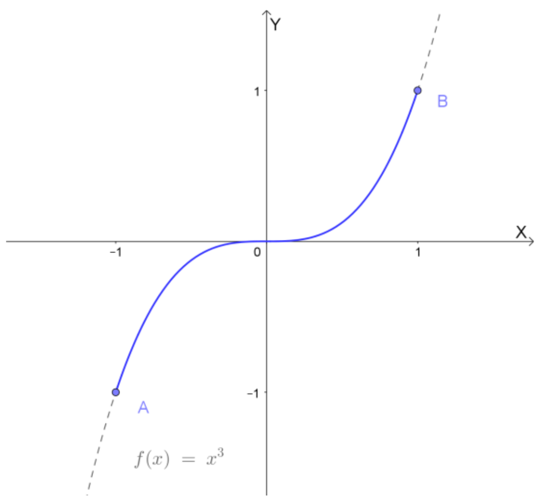
La 2) è errata, perché l'affermazione B (insieme alla premessa) ci permette di dire che x_0 è un punto stazionario (tangente orizzontale), quindi potrebbe essere un punto di flesso.

La 3) e la 4) sono errate perché non vale l'implicazione $B \Longrightarrow A$.

Forniamo un semplice esempio di funzione per la quale non vale la risposta 2) e quindi neanche le risposte 3) e la 4):

$f(x) = x^3$, $x_0 = 0$, $intervallo\ (a, b) = (-1, 1)$.

Tale funzione è continua e derivabile nell'intervallo $(-1, 1)$, essendo $f'(x) = 3x^2, risulta\ f'(0) = 0$, quindi è soddisfatta l'affermazione B, ma $x = 0$ non è punto di massimo né punto di minimo locale (studiando la derivata seconda $f''(x) = 6x$ si verifica facilmente che $x = 0$ è un punto di flesso):



Con la collaborazione di Angela Santamaria