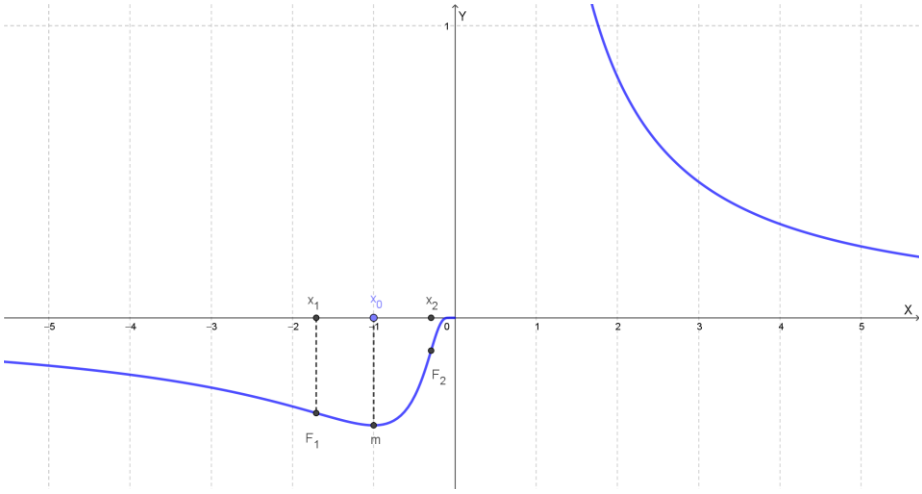
LICEO SCIENTIFICO CALENDARIO AUSTRALE 2
SESSIONE ORDINARIA 2024

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione $y = f(x)$ il cui grafico Γ è rappresentato in figura.
Nei punti di ascissa x_0, x_1 e x_2 la funzione ammette, rispettivamente, un punto stazionario e due punti di flesso.



a)

Individuare, giustificando la risposta, quale tra le seguenti funzioni è rappresentata dal grafico Γ.

$f_1(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $\quad f_2(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$, $\quad f_3(x) = xe^{(1-x)}$, $\quad f_4(x) = \frac{e^{(1-x)}}{x}$.

b)

Spiegare perché la funzione in figura non è invertibile nel suo dominio e individuare una opportuna restrizione in cui la funzione è invertibile. Rappresenta il grafico della funzione f' deducendolo dal grafico Γ.

c)

Stabilire, illustrando il ragionamento seguito, se esiste un intervallo $[a; b]$ in cui entrambe le funzioni f_1 e f_2 soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle.
Determinare l'ampiezza dell'angolo acuto compreso tra le rette r ed s tangenti rispettivamente alle funzioni f_1 e f_2 nel loro punto comune di ascissa positiva.

d)

Determinare l'espressione della primitiva di $y = f_3(x)$ passante per il punto $P(0, -e)$. Calcolare il rapporto $\frac{A_1}{A_2}$, dove A_1 è l'area della regione piana compresa tra l'asse delle ordinate, la retta $y = 1$ e il grafico di f_3 e A_2 è l'area della regione piana compresa tra il grafico della funzione f_3 e il semiasse positivo delle ascisse.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione $f_a(x) = \frac{e^{|x|+a}}{|x|+a}$, *con a parametro reale.*

a)

Dimostrare che:

- f_a *è una funzione pari* $\forall a \in \mathbb{R}$;
- f_a *ha dominio* $D = \mathbb{R}$ *se e solo se* $a > 0$;
- f_a *è derivabile* $\forall x \in \mathbb{R}$ *se e solo se* $a = 1$.

Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$.

b)

Studiare la funzione f_1 *e tracciare il suo grafico rappresentativo* Γ.

c)

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico Γ *nel suo punto di ascissa 1.*

d)

A partire dal grafico di Γ, *dedurre il grafico* Ω *della curva di equazione* $g(x) = \frac{1}{f_1(x)}$. *Determinare l'area della regione finita di piano delimitato da* Ω, *dall'asse delle ascisse e dalle rette* $x = -1$ *e* $x = 1$.

QUESITI

1. *Fornire una dimostrazione del teorema di Viviani: dato un triangolo equilatero, la somma delle tre distanze di un qualunque punto interno dai lati del triangolo è uguale all'altezza del triangolo stesso.*

2. *Un sacchetto contiene nove palline, numerate da 1 a 9. Si estraggono in blocco cinque palline: qual è la probabilità che la somma dei numeri usciti sia maggiore di 15 e minore di 35? Qual è la probabilità che la somma dei numeri usciti sia dispari?*

3. *Determinare l'equazione della superficie sferica, tangente nell'origine di un sistema di assi cartesiani al piano α:* $x + y - z = 0$, *il cui centro appartiene al piano* π: $2x + y + z + 4 = 0$.

4. *Si dimostri che, fra tutti i triangoli rettangoli di perimetro assegnato p, quello isoscele ha la massima area.*

5. *Studiare continuità e derivabilità della funzione* $f(x) = \begin{cases} |x|\, ln|x| & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ \ x = 0 \end{cases}$. *Stabilire se l'origine è un punto di massimo o di minimo per la funzione.*

6. *Dopo aver determinato il dominio della funzione* $f(x) = \frac{x^2-3x}{2-x}$, *scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.*

7. *Tra tutte le curve di equazione* $f_a(x) = ax^2 - 2ax - 3a$, *con a parametro reale non nullo, determinare il valore di a affinché l'area racchiusa tra la funzione e l'asse delle ascisse valga* $\frac{16}{3}$.

8. *Il Gallio-67, radionuclide utilizzato nella diagnostica medica, ha una percentuale di decadimento pari a 1,48% all'ora. Il modello matematico che descrive il fenomeno ha la forma* $g(t) = g_0\, e^{-kt}$, *con* $k > 0$ *e il tempo* $t \geq 0$ *espresso in ore. Determinare la costante k. Se nell'istante iniziale la massa* g_0 *risulta di 100 mg, quanti milligrammi di sostanza saranno presenti dopo un giorno?*