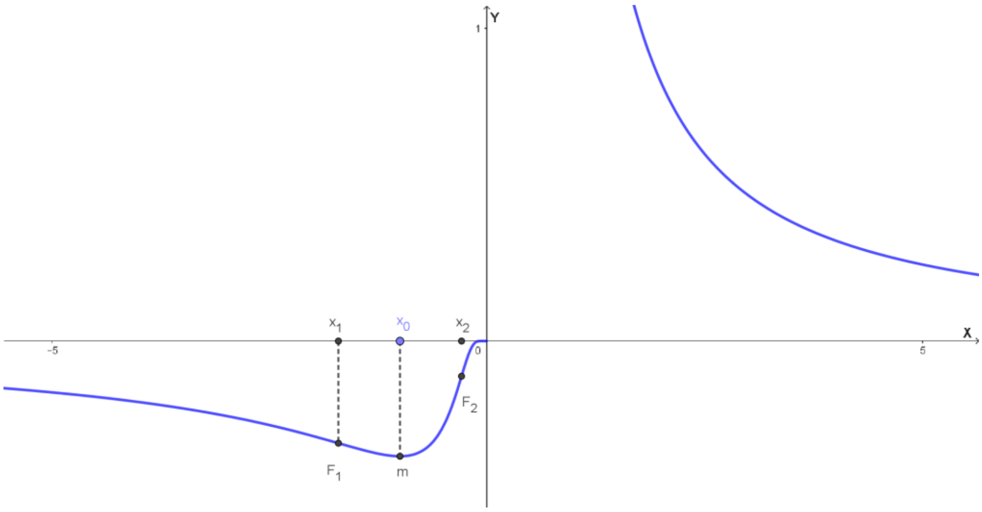
LICEO SCIENTIFICO AUSTRALE 2 ORDINARIA 2024 - PROBLEMA 1

Si consideri la funzione y=f(x) il cui grafico Γ è rappresentato in figura.
Nei punti di ascissa x_0 , x_1 e x_2 la funzione ammette, rispettivamente, un punto stazionario e due punti di flesso.



a)

Individuare, giustificando la risposta, quale tra le seguenti funzioni è rappresentata dal grafico Γ.

$$f_1(x) = xe^{\frac{1}{x}}, \qquad f_2(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}, \qquad f_3(x) = xe^{(1-x)}, \qquad f_4(x) = \frac{e^{(1-x)}}{x}.$$

Non può essere f_1, perché $\lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty$, mentre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$
Non può essere f_3, perché $f_3(1) = 1$, mentre (dalla scala indicata in figura) risulta $f(1) < 1$.

Per lo stesso motivo non può essere f_4 , perché anche $f_4(1) = 1$.

Quindi la funzione richiesta è $f_2(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$.

Anche se non è richiesto, vogliamo determinare i due punti di flessi ed il minimo indicati in figura.
Perciò dobbiamo studiare la derivata prima e la derivata seconda (tralasciamo alcuni calcoli).

$$y = f_2(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$f_2'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + \frac{1}{x}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(-1-\frac{1}{x}\right) > 0 \ quando \ -1-\frac{1}{x} > 0 \text{ ossia}$$

quando: $\frac{-x-1}{x} > 0,\ \frac{x+1}{x} < 0:\ -1 < x < 0$. Da ciò deduciamo che la funzione è crescente per $-1 < x < 0$ e decrescente per $x < -1\ e\ per\ x > 0.\ Quindi\ \boldsymbol{x = -1}$ è il punto di minimo relativo (ed anche assoluto) indicato in figura con x_0. Il minimo ha coordinate $m = \left(-1; -\frac{1}{e}\right)$.

Cerchiamo ora i due flessi (omettiamo i calcoli che portano alla derivata seconda).

$f_2''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^5}(2x^2 + 4x + 1)$. Risulta $f_2''(x) = 0$ quando $(2x^2 + 4x + 1) = 0:\ x = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$. Quindi i flessi

indicati figura hanno ascisse:

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-2-\sqrt{2}}{2} \cong -1.7\ \ ed\ \ x_2 = \frac{-2+\sqrt{2}}{2} \cong -0.3}$

b)

Spiegare perché la funzione in figura non è invertibile nel suo dominio e individuare una opportuna restrizione in cui la funzione è invertibile. Rappresenta il grafico della funzione f' deducendolo dal grafico Γ.

La funzione in figura non è invertibile nel suo dominio poiché non è iniettiva (esistono rette parallele all'asse delle x che intersecano il grafico in due punti).

La funzione è invertibile, per esempio, per $x > x_0$ $(con\ x \neq 0)$, dove è iniettiva. E' invertibile anche per $x < x_0$ (dove è strettamente decrescente) e per $x_0 < x < 0$ (dove è strettamente crescente).

Dobbiamo ora dedurre dal grafico di $\boldsymbol{f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}}$ quello di $\boldsymbol{f'(x)}$.

Il dominio di $f'(x)$ coincide con quello di $f(x)$, ipotizzando che in x_2 il flesso non sia a tangente verticale.
$f'(x) > 0$ dove il grafico di f è crescente: $x_0 < x < 0$
$f'(x) < 0$ dove il grafico di f è decrescente: $x < x_1\ \ vel\ \ x > 0$.
$f'(x) = 0$ in x_0, punto stazionario di f.

Possiamo dedurre i limiti della funzione $f'(x)$ dal grafico di f "seguendo" l'andamento della tangente nel suo punto generico:

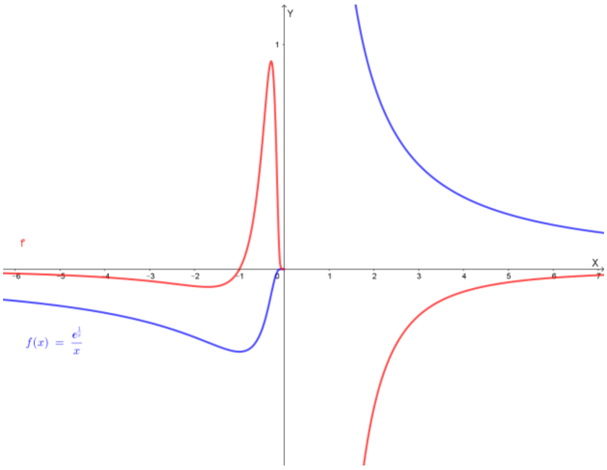
$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0^-$, $\lim_{x\to0^-} f'(x) = 0^+$ (ipotizziamo che la tangente a Γ per $x \to 0^-$ tenda ad essere orizzontale), $\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0^-$.

Il grafico di $f'(x)$ è crescente dove la sua derivata $f''(x) > 0$, quindi dove il grafico Γ volge la concavità verso l'alto: $x_1 < x < x_2\ \ e\ \ x > 0$.

Il grafico di $f'(x)$ è decrescente dove la sua derivata $f''(x) < 0$, quindi dove il grafico Γ volge la concavità verso il basso: $x < x_1,\ x_2 < x < 0$.

Pertanto $x_1\ e\ \ x_2$ sono punti di minimo e massimo rispettivamente.

Il grafico di $f'(x)$, che rappresentiamo insieme a quello di $f(x)$, è quindi il seguente (in rosso)



c)

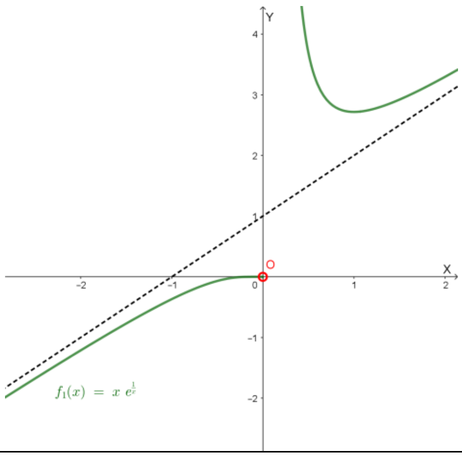
Stabilire, illustrando il ragionamento seguito, se esiste un intervallo $[a; b]$ in cui entrambe le funzioni f_1 e f_2 soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle.
Determinare l'ampiezza dell'angolo acuto compreso tra le rette r ed s tangenti rispettivamente alle funzioni f_1 e f_2 nel loro punto comune di ascissa positiva.

$$\boldsymbol{f_1(x) = xe^{\frac{1}{x}}}, \qquad \boldsymbol{f_2(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}}$$

Ricordiamo che la funzione $f_2(x)$ è quella di cui è fornito il grafico, da cui si deduce che essa soddisfa il teorema di Rolle in qualsiasi intervallo $[a; b]$ con $a < x_0 < b < 0$ in cui si abbia $f_2(a) = f_2(b)$.

Analizziamo la funzione f_1.
Essa è continua (e anche derivabile) per ogni x diverso da zero. La sua derivata è:
$f_1'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$ *se* $x = 1$. Quindi l'eventuale intervallo in cui essa soddisfa il teorema di Rolle deve contenere $x = 1$. Invece la funzione $f_2(x)$ lo soddisfa in $x_0 < 0$.

Pertanto $f_1(x)$non può soddisfare il teorema di Rolle nello stesso intervallo $[a; b]$ in cui lo soddisfa la funzione $f_2(x)$.
Anche se non richiesto forniamo il grafico della funzione $f_1(x)$:



Cerchiamo ora le intersezioni fra i grafici delle due funzioni:

$$\begin{cases} y = xe^{\frac{1}{x}} \\ y = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \end{cases} \Rightarrow\ xe^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\ ,\ \ x = \frac{1}{x}\ ,\qquad x^2 = 1\ ,\qquad x = \pm 1$$

Il punto P richiesto è quindi quello di ascissa $x = 1$, che ha ordinata $y = e$: $P = (1; e)$.

Dobbiamo ora trovare le equazioni delle rette tangenti ai grafici delle due funzioni in P.

$$f_1(x) = xe^{\frac{1}{x}}\ ,\qquad f_2(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$f_1'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\ ,\qquad f_1'(1) = 0;\ \ r:\ y - e = 0(x-1),\qquad \boldsymbol{y = e}$$

$$f_2'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + \frac{1}{x}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ ,\qquad f_2'(1) = -2e$$

$s: y - e = -2e(x-1)\ ,\qquad \boldsymbol{y = -2ex + 3e}$

La tangente dell'angolo acuto α formato dalle rette r ed s è data da:

$$tg\ (\alpha) = \left|\frac{0 + 2e}{1 + 0(-2e)}\right| = 2e\ , quindi:\ \alpha = arctg(2e) \cong 80°$$

d)

Determinare l'espressione della primitiva di $y = f_3(x)$ passante per il punto $P(0,-e)$. Calcolare il rapporto $\frac{A_1}{A_2}$, dove A_1 è l'area della regione piana compresa tra l'asse delle ordinate, la retta $y = 1$ e il grafico di f_3 e A_2 è l'area della regione piana compresa tra il grafico della funzione f_3 e il semiasse positivo delle ascisse.

La generica primitiva di $f_3(x) = xe^{(1-x)}$ si ottiene calcolando (per parti) il seguente integrale:

$$\int xe^{(1-x)}\,dx = \int x(-e^{(1-x)})'\,dx = -xe^{(1-x)} - \int (-e^{(1-x)}\,dx = -xe^{(1-x)} - e^{(1-x)} + c =$$

$$= -e^{(1-x)}(1+x) + c$$

Per la primitiva passante per $P(0,-e)$ $si\ ha:\ -e = -e + c, da\ cui\ c = 0$. La primitiva richiesta è quindi:

$y = -e^{(1-x)}(1+x)$

Per calcolare le aree richieste studiamo e rappresentiamo qualitativamente la funzione.

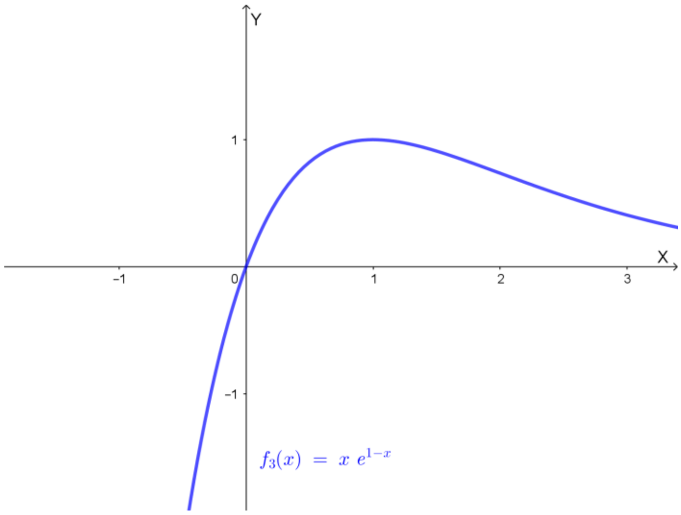
$y = f_3(x) = \ xe^{(1-x)}$

La funzione è definita, continua e derivabile su tutto R. Il suo grafico passa per l'origine degli assi cartesiani. Taglia glia assi cartesiano solo nell'origine. È positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. I suoi limiti agli estremi del dominio sono:

$\lim_{x\to-\infty} xe^{(1-x)} = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} xe^{(1-x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} e \cdot \frac{x}{e^x} = 0^+$ (ricordiamo che e^x è infinito di ordine superiore rispetto ad x per $x \to \infty$).

Osserviamo che per $\mathrm{y} = 1$ risulta $1 = \mathrm{f}_3(\mathrm{x}) = \mathrm{xe}^{(1-\mathrm{x})}$, da cui $\mathrm{x} = 1$. (1; 1) è il massimo della funzione.

Questo è sufficiente per avere un grafico qualitativo della funzione in modo da poter valutare le aree richieste.



A_1 è l'area della regione piana compresa tra l'asse delle ordinate, la retta $y = 1$ e il grafico della funzione.

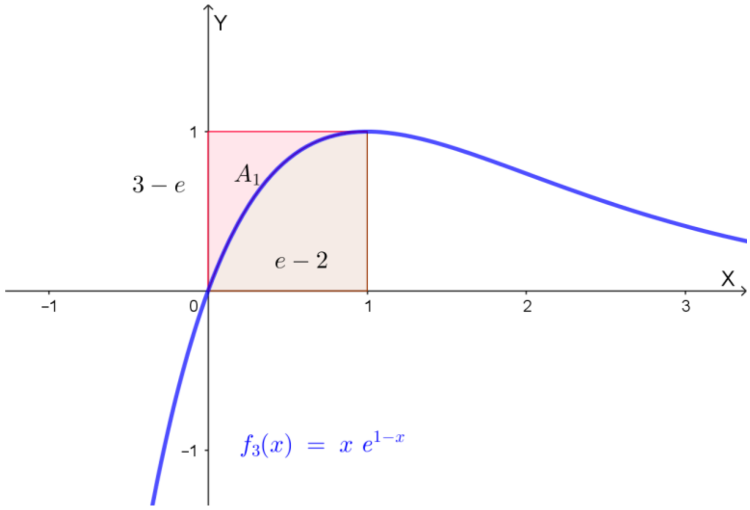
L'area A_1 si ottiene sottraendo al quadrato di lato 1 il seguente integrale:

$\int_0^1 xe^{(1-x)}\,dx.$

Per calcolare questo integrale ricordiamo che una primitiva di f_3 è $y = -e^{(1-x)}(1+x)$. Quindi:

$\int_0^1 xe^{(1-x)}\,dx = \left[-e^{(1-x)}(1+x)\right]_0^1 = -2 - (-e) = e - 2.$

Pertanto: $A_1 = 1 - (e-2) = 3 - e \cong 0.28\,u^2$

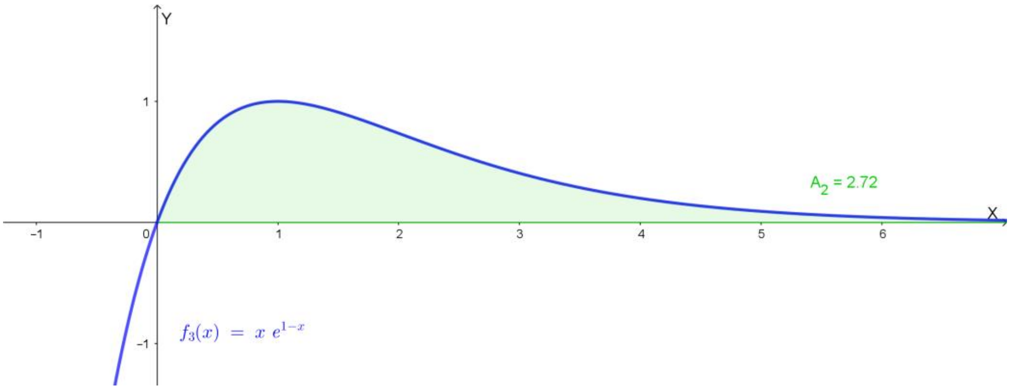


A_2 è l'area della regione piana compresa tra il grafico della funzione f_3 e il semiasse positivo delle ascisse.

$$A_2 = \int_0^{+\infty} xe^{(1-x)}\,dx = \lim_{k\to+\infty}\left[-e^{(1-x)}(1+x)\right]_0^k = \lim_{k\to+\infty}\left[-e^{(1-k)}(1+k)-(-e)\right] =$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left[-\frac{1+k}{e^{k-1}}+e\right] = e \cong 2.72\ u^2$$

(ricordiamo che, per $k \to +\infty,\ e^{k-1}$ è infinito di ordine superiore rispetto a $k+1$).



Il rapporto richiesto è quindi:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{3-e}{e} \cong 0.10$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria