LICEO SCIENTIFICO AUSTRALE 2 ORDINARIA 2024 - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione

$$f_a(x) = \frac{e^{|x|+a}}{|x|+a}$$

con a parametro reale.

a)

Dimostrare che:

- f_a *è una funzione pari* $\forall a \in \mathbb{R}$;
- f_a *ha dominio* $D = \mathbb{R}$ *se e solo se* $a > 0$;
- f_a *è derivabile* $\forall x \in \mathbb{R}$ *se e solo se* $a = 1$;

Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$.

Dimostriamo che f_a è pari per ogni valore di a.

$$f_a(x) = \frac{e^{|x|+a}}{|x|+a}$$

$f_a(-x) = \frac{e^{|-x|+a}}{|-x|+a} = \frac{e^{|x|+a}}{|x|+a} = f_a(x)$: *quindi la funzione è pari per ogni valore di a.*

Dimostriamo che f_a ha dominio $D = \mathbb{R}$ se e solo se $a > 0$.

Il dominio della funzione è dato da: $|x| + a \neq 0$; ciò avviene per ogni x se e solo se $a > 0$.

Dimostriamo che f_a è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$ se e solo se $a = 1$.

$$\boldsymbol{f_a} = \begin{cases} \dfrac{e^{-x+a}}{-x+a}, & se\ x < 0 \\ \dfrac{e^{a}}{a}, & se\ x = 0 \\ \dfrac{e^{x+a}}{x+a}, & se\ x > 0 \end{cases}$$

Siccome se $a = 0$ non esiste $f_a(0)$, la funzione non può essere derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$ se $a = 0$.

Per essere derivabile su tutto R dobbiamo quindi porre $a \neq 0$.

Osserviamo che $se\ x < 0$ la funzione non è definita quando $-x + a = 0,\ x = a$. Quindi non può essere $a < 0$, perché altrimenti la funzione non è continua in $x = a$.

Osserviamo che per $a > 0$ la funzione è derivabile per $x < 0\ \ e\ \ per\ x > 0$ essendo:

se $x < 0$: $y' = \frac{(-e^{-x+a})(-x+a)+e^{-x+a}}{(-x+a)^2}$, che esiste per ogni $x \neq a$ (sempre verificato perché $a > 0$)

$se\ x > 0$: $y' = \frac{(e^{x+a})(x+a)-e^{x+a}}{(x+a)^2}$, che esiste per ogni $x \neq -a$ (sempre verificato perché $a > 0$)

La funzione è derivabile su tutto R se e solo se lo è in $x = 0$. Osserviamo che $per\ x = 0$ la funzione è continua, essendo:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-x+a}}{-x+a} = \frac{e^a}{a} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+a}}{x+a} = f_a(0)$$

Per la condizione sufficiente di derivabilità la funzione sarà derivabile $\ in\ x = 0$ se:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = l \text{ (finito)}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(-e^{-x+a})(-x+a)+e^{-x+a}}{(-x+a)^2} = \frac{-e^a(a)+e^a}{a^2} = -\frac{e^a}{a^2}\,(a-1)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{x+a})(x+a)-e^{x+a}}{(x+a)^2} = \frac{e^a(a)-e^a}{a^2} = -\frac{e^a}{a^2}\,(1-a)\ .$$

Deve quindi essere:

$$-\frac{e^a}{a^2}\,(a-1) = -\frac{e^a}{a^2}\,(1-a), \qquad da\ cui\colon\ \ a-1 = 1-a, \qquad a = 1.$$

Abbiamo quindi dimostrato che f_a è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$ se e solo se $a = 1$.

b)

Studiare la funzione f_1 *e tracciare il suo grafico rappresentativo* Γ.

$$f_1(x) = \frac{e^{|x|+1}}{|x|+1}$$

Ricordiamo che il grafico della funzione $f(|x|)$ si ottiene da quello di $f(x)$ confermando la parte del grafico di $f(x)$ che si ha per $x > 0$ e ribaltando tale parte rispetto all'asse delle ordinate.

Nel nostro caso, posto $f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+1}$ risulta $f_1(x) = f(|x|)$, per ottenere Γ è sufficiente studiare la funzione: $y = f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+1}$.

Studiamo quindi la funzione $y = f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+1}$.

Questa si ottiene dalla più semplice $y = g(x) = \frac{e^x}{x}$ con una traslazione verso sinistra di vettore (-1; 0).

Procediamo quindi con lo studio della funzione $y = \frac{e^x}{x}$.
Dominio: $-\infty < x < 0 \ \cup \ 0 < x < +\infty$

Non ci sono intersezioni con gli assi cartesiani.

La funzione non è pari né dispari.

E' positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$.

Calcolo dei limiti alla frontiera del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{0^+}{-\infty}\right] = 0^-\ ,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = +\infty\ (e^x \text{ è } infinito\ di\ ordine\ superiore\ rispetto\ ad\ x).$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty\ ,\quad \lim_{x\to0^+} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

Asintoti:

Asintoto verticale $x = 0$. Asintoto orizzontale $y = 0\ per\ x \to -\infty$.

Possibile asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{e^x}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$ (e^x è $infinito\ di\ ordine\ superiore\ rispetto\ ad\ x^2$): **no asintoto obliquo**.

Studio della derivata prima:

$$g'(x) = \frac{e^x(x) - e^x(1)}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$g'(x) = 0$ per $x = 1$: punto stazionario.

$g'(x) > 0\ \ per\ x > 1,\quad g'(x) < 0\quad per\ x < 0\ \ e\ \ 0 < x < 1.$

La funzione è quindi decrescente per $x < 0\ \ e\ \ 0 < x < 1$ e crescente per $x > 1$.

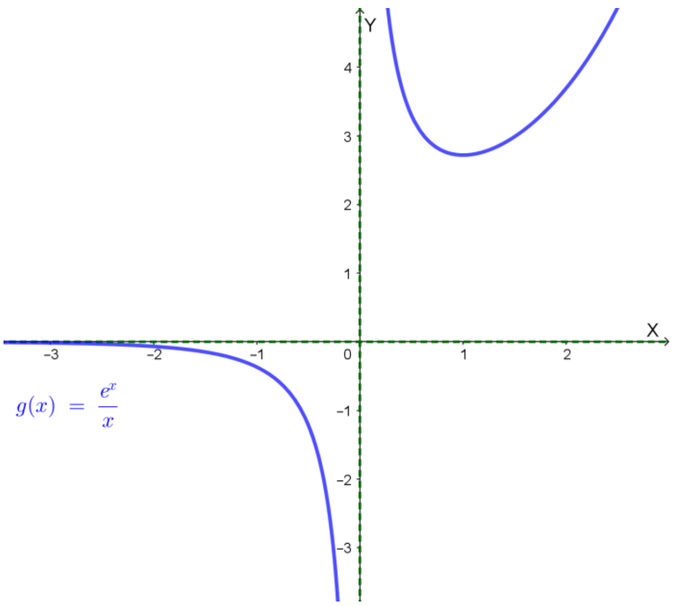
$x = 1$ è $punto\ di\ minimo\ relativo$ (con ordinata $y = e$): $m = (1; e)$.

Studio della derivata seconda:

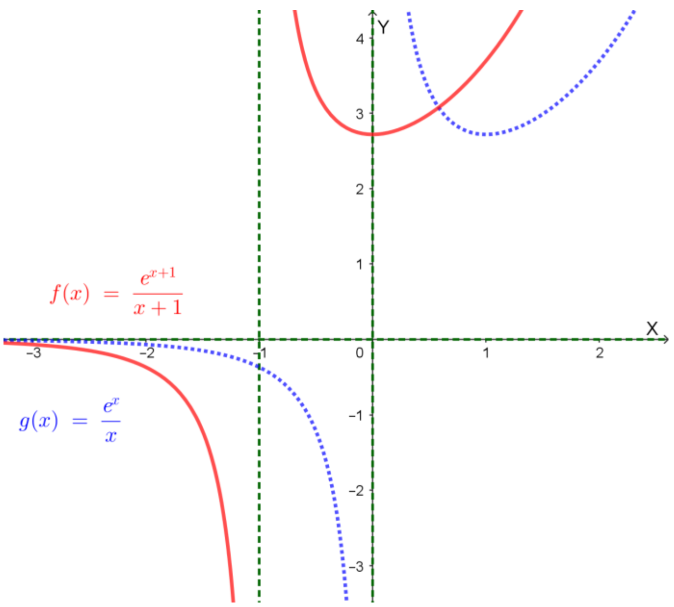
$$g''(x) = \frac{[e^x(x-1) + e^x(1)]x^2 - e^x(x-1)(2x)}{x^4} = \cdots = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$$

Essendo $x^2 - 2x + 2 > 0$ per ogni x (il discriminante è minore di zero), la derivata seconda è positiva per $x > 0$ (concavità del grafico verso l'alto) e negativa per $x < 0$ (concavità verso il basso).
Non ci sono flessi.

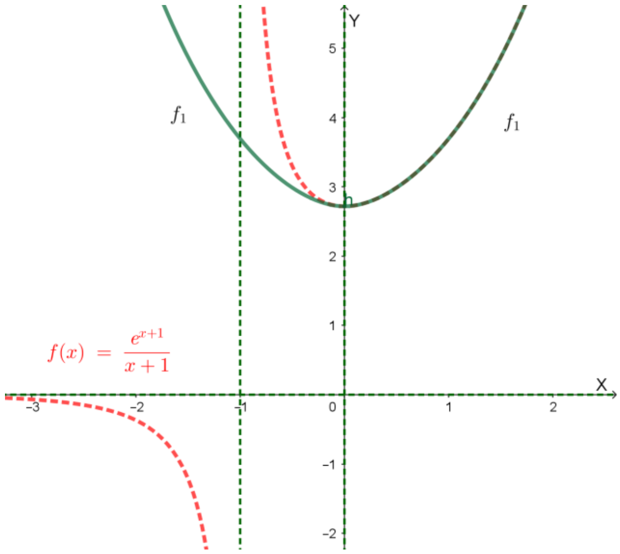
Il grafico di $y = g(x) = \frac{e^x}{x}$ è quindi il seguente:



Il grafico di $y = f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+1}$, si ottiene dal precedente traslandolo a sinistra di 1 (taglia l'asse delle ordinate in $y = e,\ \ che$ è $minimo\ relativo\ per\ x = 0$).



Infine, il grafico Il grafico Γ (in verde) della funzione richiesta $f_1(x) = \frac{e^{|x|+1}}{|x|+1}$ si ottiene (come già detto) da quello di f confermando la sua parte a destra dell'asse delle ordinate e ribaltandola a sinistra dello stesso asse:



c)

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico Γ *nel suo punto di ascissa 1.*

$$f_1(x) = \frac{e^{|x|+1}}{|x|+1}$$

Il punto richiesto ha coordinate $P = \left(1; \frac{e^2}{2}\right)$.

Ricordiamo che per $x > 0$ è $f_1(x) = \frac{e^{x+1}}{x+1}$, quindi: $f'_1(x) = \frac{e^{x+1}(x+1)-e^{x+1}}{(x+1)^2} = \frac{xe^{x+1}}{(x+1)^2}$.

Il coefficiente angolare della tangente in P è quindi: $m = f'_1(1) = \frac{e^2}{4}$.

Tangente in P: $y - \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{4}(x-1)$, $y = \frac{e^2}{4}x + \frac{1}{4}e^2$

d)

A partire dal grafico di Γ, *dedurre il grafico* Ω *della curva di equazione* $g(x) = \frac{1}{f_1(x)}$. *Determinare l'area della regione finita di piano delimitato da* Ω, *dall'asse delle ascisse e dalle rette* $x = -1$ *e* $x = 1$.

$$f_1(x) = \frac{e^{|x|+1}}{|x|+1}, \qquad g(x) = \frac{1}{f_1(x)}$$

Studiamo la funzione $g(x)$, a partire dal grafico di $f_1(x)$.

Dominio: tutto R ($f_1(x)$è $sempre\ positiva$)

Essendo $f_1(x)$ pari, anche $g(x)$ sarà pari (grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate).

Intersezioni con gli assi cartesiani:

se $x = 0$ $g(0) = \frac{1}{f_1(0)} = \frac{1}{e} \cong 0.4$. Se $y = 0$ $\frac{1}{f_1(x)} = mai$ (non viene intersecato l'asse delle ascisse).

Segno:

Essendo $f_1(x) > 0\ sempre,$ anche $g(x) > 0$ sempre.

Limiti agli estremi del dominio $-\infty < x < +\infty$

$$\lim_{x\to\mp\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f_1(x)} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0^+ : y = 0\ \ asintoto\ orizzontale.$$

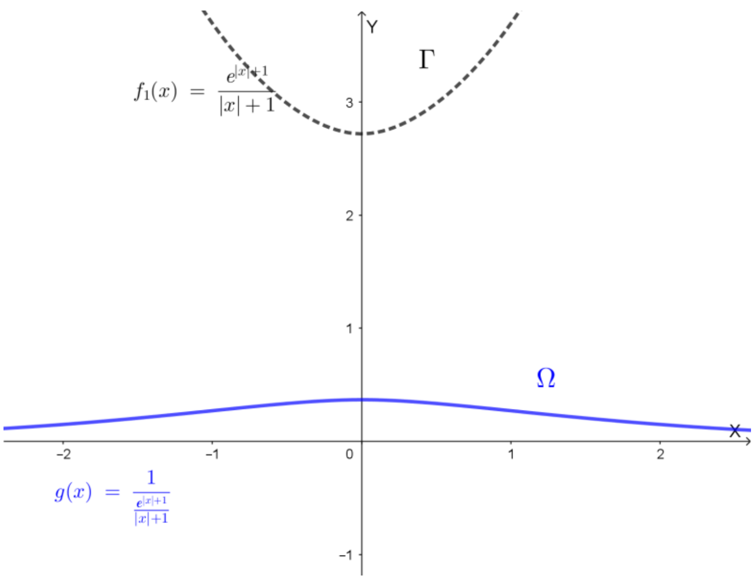
Monotonia:

Per $x < 0$ $f_1(x)$ è positiva e decrescente, quindi $g(x) = \frac{1}{f_1(x)}$ sarà positiva e crescente.

Per $x > 0$ $f_1(x)$ è positiva e crescente, quindi $g(x) = \frac{1}{f_1(x)}$ sarà positiva e decrescente.

$x = 0$ è punto di minimo relativo per $f_1(x)$, quindi sarà punto di massimo relativo per $g(x)$ e la sua ordinata è $\frac{1}{e}$.

Il grafico di $g(x)$ sarà quindi del tipo (blu a tratto pieno) indicato nella seguente figura:

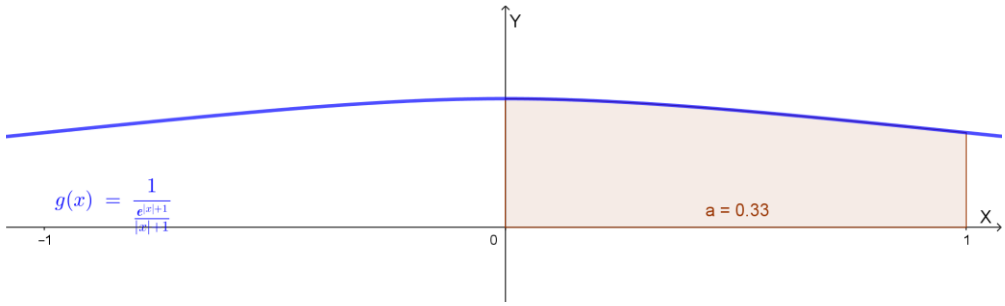


Osserviamo che il grafico Ω di $g(x)$ ha due flessi (simmetrici rispetto all'asse delle ordinate, le cui ascisse però non possono essere dedotte dal grafico di $f_1(x)$. Effettuando il calcolo diretto, di cui diamo solo il risultato, per $x > 0$ si ottiene:

$g''(x) = \frac{x-1}{e^{x+1}}$ da cui si deduce che $x = 1$ è il punto di flesso per $x > 0$ (per la simmetria detta sopra, l'altro punto di flesso ha ascissa $x = -1$).

Dobbiamo ora determinare l'area della regione finita di piano delimitato da $\boldsymbol{\Omega}$, dall'asse delle ascisse e dalle rette $\boldsymbol{x = -1}$ e $\boldsymbol{x = 1}$.

Per la simmetria di Ω rispetto all'asse delle ordinate l'area richiesta è il doppio dell'area della regione rappresentata nella figura seguente:



L'area richiesta è quindi data da:

$$Area = 2\int_0^1 g(x)\,dx = 2\int_0^1 \frac{x+1}{e^{x+1}}\,dx$$

Cerchiamo una primitiva di $\frac{x+1}{e^{x+1}} = (x+1)e^{-x-1}$ integrando per parti:

$$\int (x+1)e^{-x-1}\ dx = \int (x+1)(-e^{-x-1})'\ \mathrm{dx} = \left[(-e^{-x-1})(x+1) - \int (1)(-e^{-x-1})dx\right] =$$

$$= -(x+1)e^{-x-1} - e^{-x-1} = -e^{-x-1}(x+2) + c$$

Quindi:

$$Area = 2\int_0^1 \frac{x+1}{e^{x+1}}\,dx = 2[-e^{-x-1}(x+2)]_0^1 = 2(-3e^{-2} + 2e^{-1}) = \frac{4}{e} - \frac{6}{e^2} \cong 0.6\ u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria