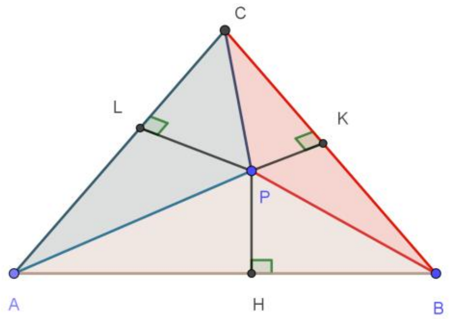
LICEO SCIENTIFICO AUSTRALE 2 ORDINARIA 2024 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

Fornire una dimostrazione del teorema di Viviani: dato un triangolo equilatero, la somma delle tre distanze di un qualunque punto interno dai lati del triangolo è uguale all'altezza del triangolo stesso.



Dobbiamo dimostrare che $PH + PK + PL = h$ $(altezza\ del\ triangolo\ ABC)$.

L'area di ABC è data da: $\frac{1}{2}AB \cdot h = Area(ABP) + Area(BPC) + Area(APC) =$

$$= \frac{1}{2}AB \cdot PH + \frac{1}{2}BC \cdot PK + \frac{1}{2}AC \cdot PL$$

Ma $AB = BC = AC$, quindi:

$$\frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2}AB \cdot PH + \frac{1}{2}BC \cdot PK + \frac{1}{2}AC \cdot PL = \frac{1}{2}AB \cdot PH + \frac{1}{2}AB \cdot PK + \frac{1}{2}AB \cdot PL$$

Dividendo il primo e l'ultimo membro per $\frac{1}{2}AB$ si ottiene la relazione richiesta:

$$\boldsymbol{h = PH + PK + PL}$$

QUESITO 2

Un sacchetto contiene nove palline, numerate da 1 a 9. Si estraggono in blocco cinque palline: qual è la probabilità che la somma dei numeri usciti sia maggiore di 15 e minore di 35? Qual è la probabilità che la somma dei numeri usciti sia dispari?

I casi possibili sono le combinazioni di 9 oggetti a 5 a 5, quindi: $\binom{9}{5} = 126.$

Le cinquine formate da numeri (da 1 a 9) la cui somma è inferiore a 35 devono contenere almeno uno dei numeri 1, 2, 3 ,4. Infatti l'unica cinquina che non contiene almeno uno di questi numeri è (5, 6, 7, 8, 9) e la loro somma è 35 (che è il massimo possibile che si può ottenere). Osserviamo che il minimo valore che si può ottenere come somma è 15, ottenuto con la cinquina (1, 2, 3, 4, 5). Quindi delle 126 cinquine possibili solo 2 non hanno somma che non sia maggiore di 15 e minore di 35.

I casi favorevoli sono quindi: $126 - 2 = 124$.

La probabilità che la somma dei numeri usciti sia maggiore di 15 e minore di 35 è quindi:

$$p = \frac{124}{126} \cong 0{,}984 \cong 98{,}4\%$$

Calcoliamo ora la probabilità che la somma dei numeri usciti sia dispari?

Affinché la somma dei cinque numeri estratti sia dispari, la cinquina deve contenere un numero dispari di numeri dispari (la somma di un numero pari di numeri dispari è un numero pari). I numeri dispari da 1 a 9 sono CINQUE: 1, 3, 5, 7 e 9. I pari sono QUATTRO: 2, 4, 6, 8.

1) C'è 1 solo numero dispari (5 possibilità). Gli altri quattro devono essere pari: 1 possibilità. 5 casi.
2) Ci sono solo 3 numeri dispari. Le possibilità sono le combinazioni di 5 oggetti a 3 a 3: $\binom{5}{3} = 10$. Gli altri 2 devono essere pari: le possibilità sono le combinazioni di 4 oggetti a 2 a 2: $\binom{4}{2} = 6$. Abbiamo 10x6=60 possibilità di avere 3 numeri dispari.
3) Ci sono 5 numeri dispari. Abbiamo una sola possibilità (i cinque numeri sono tutti dispari).

Abbiamo quindi in totale: $5 + 60 + \ 1 = 66$ casi favorevoli.

La probabilità che la somma dei numeri usciti sia dispari è:

$$p = \frac{66}{126} \cong 0.524 \cong 52.4\%$$

QUESITO 3

Determinare l'equazione della superficie sferica, tangente nell'origine di un sistema di assi cartesiani al piano α: $x + y - z = 0$, il cui centro appartiene al piano π: $2x + y + z + 4 = 0$.

Il centro della sfera appartiene alla normale nel punto di tangenza $O = (0, 0, 0)$ al piano α.

La normale a tale piano ha come parametri direttori i coefficienti di x, y e z dell'equazione del piano, quindi $(1, 1, -1)$. Essa ha quindi equazioni parametriche:

$$n: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

Ma il centro appartiene anche al piano π: $2x + y + z + 4 = 0$. Quindi:

$$2t + t - t + 4 = 0\,, \qquad t = -2: \ \ centro\ C = (-2, -2, 2)$$

Il raggio R è la distanza di C da O, quindi:

$$R^2 = (-2-0)^2 + (-2-0)^2 + (2-0)^2 = 12.$$

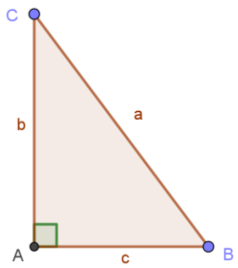
La sfera di centro $C = (x_C, y_C, z_C)$ e raggio R ha equazione $(x-x_c)^2 + (y-y_C)^2 + (z-z_c)^2 = R^2$

La sfera richiesta ha quindi equazione:

$(x+2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 12,\ \ x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y - 4z = 0$

QUESITO 4

Si dimostri che, fra tutti i triangoli rettangoli di perimetro assegnato p, quello isoscele ha massima area.



Risulta $a + b + c = p = costante$. Ma è anche: $a^2 = b^2 + c^2$. Dalla prima relazione si ha:

$$a = p - b - c, \qquad quindi:\ (p-b-c)^2 = b^2 + c^2\ , \qquad p^2 - 2pb - 2pc + 2bc = 0$$

Posto per esempio $c = x$, si ha: $p^2 - 2pb - 2px + 2bx = 0,\ \ b = \frac{p^2-2px}{2p-2x}$

$$Area\ (ABC) = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2-2px}{2p-2x}\right)x = \frac{p}{4}\left(\frac{px-2x^2}{p-x}\right), \qquad con\ 0 < x < p$$

L'area è massima se lo è

$$f(x) = \frac{px-2x^2}{p-x}$$

$$f'(x) = \cdots = \frac{(p^2-4px+2x^2)}{(p-x)^2} > 0\ se\ \ p^2 - 4px + 2x^2 > 0,$$

$$0 < x < \frac{p}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)\ vel\ \ x > \frac{p}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)$$

Ma $\frac{p}{2}\left(2+\sqrt{2}\right) > p$, quindi la funzione è crescente per $0 < x < \frac{p}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)$ e decrescente per $\frac{p}{2}\left(2-\sqrt{2}\right) < x < p$: segue che f è massima se $x = \frac{p}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)$. Per tale valore di $x = c$ si ha:

$$b = \frac{p^2 - p^2\left(2-\sqrt{2}\right)}{2p - p\left(2-\sqrt{2}\right)} = \frac{-p+p\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{p\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2}}{2} = \frac{p}{2}\left(2-\sqrt{2}\right) = c$$

Quindi l'area del triangolo è massima se $b = c$, cioè se il triangolo è isoscele.

QUESITO 5

Studiare continuità e derivabilità della funzione $f(x) = \begin{cases} |x|\, ln|x| & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ \ x = 0 \end{cases}$. *Stabilire se l'origine è un punto di massimo o di minimo per la funzione.*

Riscriviamo la funzione nella forma seguente:

$$f(x) = \begin{cases} -x\ln(-x) & se\ x < 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ x\ln x & se \quad x > 0 \end{cases}$$

La funzione è definita su tutto R ed è continua e derivabile $\forall x \neq 0$ (prodotto di funzioni continue e derivabili). L'unico punto critico da analizzare è $x = 0$. Analizziamone la continuità.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}[-x\ln(-x)] = F.I\ [0 \cdot \infty]$$

Ma, ricordando che $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-$ (come si può dimostrare, per esempio, con la regola di de L'H$\hat{o}$pital),

si ha: $\lim_{x\to 0^-}[-x\ln(-x)] = 0^-$.

Inoltre $f(0) = 0$: quindi la funzione è continua in $x = 0$, quindi è continua su tutto R.

Analizziamo ora la derivabilità in $x = 0$.

Se $x < 0$: $f'(x) = -\ln(-x) - x\left(\frac{1}{-x}\right)(-1) = -\ln(-x) - 1$: $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = +\infty$

Se $x > 0$: $f'(x) = \ln(x) + x\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x) + 1$: $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$

La funzione NON è quindi derivabile in $x = 0$ $(dove\ c'\text{è}\ una\ cuspide)$

Pertanto: la funzione è continua su tutto R e derivabile $\forall x \neq 0$.

Stabiliamo ora se l'origine è un punto di massimo o di minimo per la funzione.

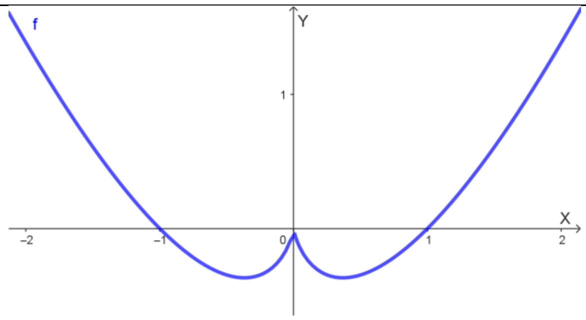
Ricordiamo che se $x < 0$: $f'(x) = -\ln(-x) - 1 > 0\ se\ \ln(-x) < -1, -x < e^{-1},\ x > -e^{-1}$: la funzione è quindi crescente se $-e^{-1} < x < 0$.

Se $x > 0$: $f'(x) = \ln(x) + 1 > 0\ \ se\ \ x > e^{-1}$: la funzione è quindi decrescente se $0 < x < e^{-1}$.

Quindi la funzione cresce se $-e^{-1} < x < 0$ e decresce se $0 < x < e^{-1}$:

l'origine è un punto di massimo (relativo) per la funzione.

Forniamo, anche se non richiesto, il grafico della funzione:



QUESTO 6

Dopo aver determinato il dominio della funzione $f(x) = \frac{x^2-3x}{2-x}$, scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.

Dominio: $-\infty < x < 2 \;\cup\; 2 < x < +\infty$.

Eventuale asintoto verticale $x = 2$. Verifichiamolo:

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x}{2-x} = \left[\frac{-2}{0}\right] = \infty$: $x = 2$ asintoto verticale.

Trattandosi di una funzione razionale fratta in cui il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore possiamo dire che c'è asintoto obliquo (non ci sono asintoti orizzontali).
Cerchiamo l'equazione dell'asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x}{2x-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1 = m$$

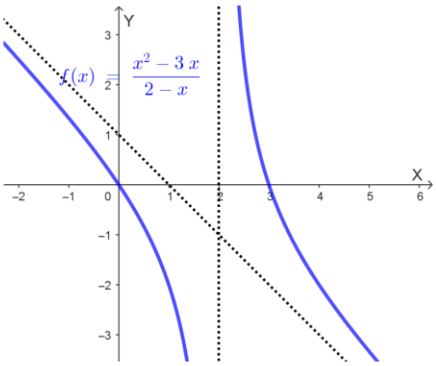
$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2-3x}{2-x} + x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2x-x^2}{2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{-x} = 1 = q$$

Si ha quindi l'asintoto obliquo $y = -x + 1$, per $x \to \pm\infty$.

N.B.

La funzione $y = f(x) = \frac{x^2-3x}{2-x}$ può essere scritta nella forma $y(2-x) = x^2 - 3x$ che è una conica, in particolare un'iperbole (perché non è definita per $x = 2$).

Il grafico, non richiesto, della funzione è il seguente:



QUESITO 7

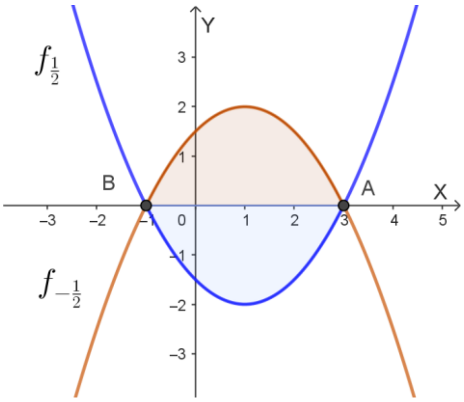
Tra tutte le curve di equazione $f_a(x) = ax^2 - 2ax - 3a$, *con a parametro reale non nullo, determinare il valore di a affinché l'area racchiusa tra la funzione e l'asse delle ascisse valga* $\frac{16}{3}$.

$f_a(x) = ax^2 - 2ax - 3a$ rappresenta un fascio di parabole con asse parallelo all'asse delle ordinate, e può essere scritta nella forma:

$y = a(x^2 - 2x - 3) = a(x - 3)(x + 1)$

Tutte le parabole passano per i punti $A = (3; 0)$ *e* $B = (-1; 0)$ ed hanno vertice di coordinate $V = (1;\ -4a)$.
La regione di cui si chiede l'area è quindi un segmento parabolico e la sua area può essere calcolata

utilizzando il teorema di Archimede: $Area = \frac{2}{3}\overline{AB}|y_V| = \frac{2}{3}(4)|-4a| = \frac{32}{3}|a| = \frac{16}{3}$ *se* $a = \pm\frac{1}{2}$.



Allo stesso risultato si può arrivare col calcolo integrale:

$$Area = \left|\int_{-1}^{3} a(x^2 - 2x - 3)dx\right| = \left|a\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3}\right| = \cdots = \left|a\left(-\frac{32}{3}\right)\right| = \frac{16}{3}|2a| = \frac{16}{3} \text{ se } a = \pm\frac{1}{2}.$$

QUESITO 8

Il Gallio-67, radionuclide utilizzato nella diagnostica medica, ha una percentuale di decadimento pari a 1,48% all'ora. Il modello matematico che descrive il fenomeno ha la forma $g(t) = g_0\, e^{-kt}$, *con* $k > 0$ *e il tempo* $t \geq 0$ *espresso in ore. Determinare la costante k. Se nell'istante iniziale la massa* g_0 *risulta di 100 mg, quanti milligrammi di sostanza saranno presenti dopo un giorno?*

$g(t) = g_0\, e^{-kt}$, *con* $k > 0$ *in* h^{-1} $t \geq 0$ *in ore.*

Dopo un'ora sono decaduti l'1.48% di 100 mg, quindi: 1.48 mg. Perciò: $(100 - 1.48)\ mg$ = 98.52 mg rimasti dopo 1 ora. Possiamo ora trovare k:

$$98.52 = 100e^{-k}, \qquad -k = ln(0.9852), \qquad k = 0.0149$$

Si ha quindi:

$g(t) = g_0\, e^{-kt} = 100\, e^{\ln(0.9852)t} = 100\left(e^{\ln(0.9852)}\right)^t = 100(0.9852)^t$

Dopo un giorno, $t = 24\, h$, $g(t) = 100(0.9852)^{24}\, mg \cong 100(0.6992)\, mg \cong 70\, mg$,

Dopo un giorno quindi, dei 100 mg iniziali, saranno presenti circa 70 mg di Gallio-67.

Cerchiamo, anche se non richiesto, il tempo di dimezzamento del Gallio-67.

$$\frac{g_0}{2} = g_0\, e^{-kt};\quad e^{kt} = 2,\qquad kt = \ln(2)\,, t = \frac{\ln(2)}{k} = \frac{\ln(2)}{0.0149} \cong 46.52\; ore:\; tempo\ di\ dimezzamento.$$

N.B.

Probabilmente, se non ci sfugge qualcosa, c'è un errore nel testo, perché il Gallio- 67 ha un tempo di dimezzamento di circa 78 ore.

Vedi per esempio Wikipedia all'indirizzo seguente:

https://it.wikipedia.org/wiki/Gallio_(elemento_chimico)#:~:text=L'emivita%20%C3%A8%20di%2021%2C13%20minuti

oppure: https://periodictable.com/Isotopes/031.67/index.dm.html

dove il tempo di dimezzamento è indicato in 3.2617 giorni, pari a $3.2617x24\; ore = 78.2\; ore$.

Si ottiene il valore corretto del tempo di dimezzamento se sostituiamo la *percentuale di decadimento indicata in 1.48% all'ora, con 0.89% all'ora.* Con tale valore, rifacendo i calcoli, si ottiene infatti:

dopo un'ora sono decaduti lo 0.89% di 100 mg, quindi: 0.89 mg. Perciò: $(100 - 0.89)\; mg = \; 99.11\; mg$ rimasti dopo 1 ora. Possiamo così trovare k:

$99.11 = 100e^{-k},\qquad -k = ln(0.9911),\qquad k \cong 0.00894$

Si ha quindi:

$g(t) = g_0\, e^{-kt} = 100\, e^{\ln(0.9911)t} = 100\left(e^{\ln(0.9911)}\right)^t = 100(0.9911)^t$

Dopo un giorno, $t = 24\, h$, $g(t) = 100(0.9911)^{24} mg \cong 100(0.8069)\; mg \cong 81\; mg$,

Dopo un giorno, quindi, dei 100 mg iniziali saranno presenti circa 81 mg di Gallio-67.

Cerchiamo, anche se non richiesto, il tempo di dimezzamento del Gallio-67.

$$\frac{g_0}{2} = g_0\, e^{-kt};\quad e^{kt} = 2,\qquad kt = \ln(2)\,, t = \frac{\ln(2)}{k} = \frac{\ln(2)}{0.00894} \cong 78\; ore:\; tempo\ di\ dimezzamento.$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria