Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI22, LI23, EA02

Disciplina: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Fissato un parametro reale k, con $k \neq 0$, si consideri la funzione f_k così definita:

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{k(x+2)}{\sqrt{x+1}} & x > 0 \\ -x^2 + 2k & x \leq 0 \end{cases}$$

Sia Γ_k il grafico di f_k in un piano cartesiano Oxy.

a) Al variare del parametro k, dimostrare che la funzione è sempre continua e derivabile in tutto il suo insieme di definizione e discutere la natura del punto stazionario P, del quale se ne chiedono le coordinate.

b) Determinare il valore del parametro k affinché la retta tangente a Γ_k, nel suo punto di ascissa $x = 2$, sia perpendicolare alla retta di equazione $6x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - 1 = 0$. Successivamente determinare l'equazione di tale retta tangente.

c) Si ponga d'ora in avanti $k = \frac{1}{2}$. Studiare la funzione $f_{\frac{1}{2}}(x)$ e tracciarne il grafico $\Gamma_{\frac{1}{2}}$. Si consideri il trapezio rettangolo inscritto nella regione finita di piano del II quadrante delimitata dagli assi cartesiani e da $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ e avente base maggiore OP. Determinare le coordinate del punto Q appartenente a $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ affinché la superficie di tale trapezio sia massima.

d) Determinare l'area della regione finita di piano delimitata da $\Gamma_{\frac{1}{2}}$, dall'asse delle ascisse e dalla retta $x = 3$.

Ministero dell'istruzione e del merito

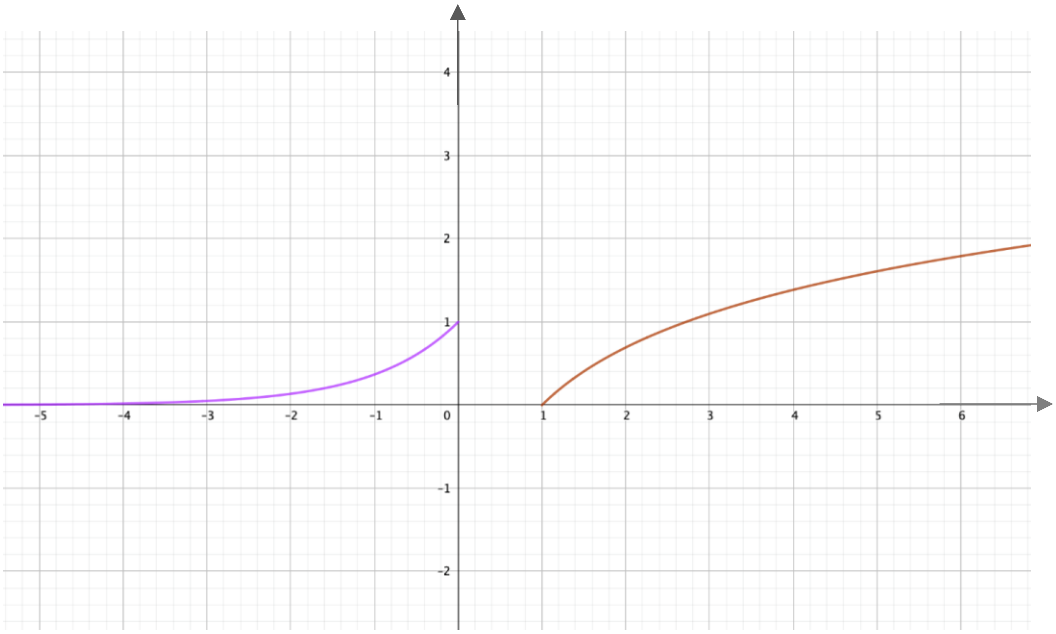
A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI22, LI23, EA02

Disciplina: MATEMATICA

PROBLEMA 2

In figura, sono rappresentati i grafici della funzione esponenziale, con $x < 0$, e della funzione logaritmica, con $x > 1$, entrambe in base naturale.



a) Determinare il polinomio di terzo grado $P(x)$ in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ P(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln(x) & x > 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

b) Posto $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + x + 1$, dimostrare che ammette un ulteriore zero distinto da 1. Dopo aver determinato le ascisse dei punti stazionari e studiato la concavità, tracciare il grafico del polinomio completando il grafico γ rappresentativo della funzione f.

c) Indicato con B il punto di flesso di $P(x)$ e con A e C i punti di ascisse, rispettivamente, $x = 0$ e $x = 1$, dimostrare che B è il centro di simmetria dell'arco di estremi A e C. Verificare che le rette tangenti a γ, nei punti A e C, sono parallele.

d) Scrivere l'equazione della retta t, tangente al grafico γ, nel punto B di ascissa $\frac{1}{2}$. Verificare che t non ha ulteriori punti in comune con γ. Determinare l'area della regione finita di piano delimitata da t, da γ e dalla retta di equazione $x = \frac{3}{2}$.

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI22, LI23, EA02

Disciplina: MATEMATICA

QUESITI

1. Si considerino due circonferenze congruenti γ e γ', di centri rispettivamente O e O', le quali si intersecano nei punti A e B. Indicato con P il punto di intersezione della retta BO', distinto da B, con la circonferenza γ, dimostrare che il quadrilatero $PO'AO$ è inscrivibile in una circonferenza.
2. Si consideri una scatola contenente 9 palline, di cui 6 bianche e 3 nere. Si estraggono le palline una ad una senza reinserimento finché non siano estratte 4 palline bianche. Qual è la probabilità che siano necessarie esattamente 4 estrazioni? Qual è la probabilità che siano necessarie esattamente 6 estrazioni?
3. Nello spazio cartesiano Oxyz sono assegnati i punti A(2,0,2), B(2,-1,0), C(-2,0,3), D(0,0,3).Verificare che le rette AB e CD sono sghembe e determinare l'equazione del piano α passante per AB e perpendicolare alla retta CD.
4. Fra tutti i coni aventi area totale uguale ad S, determinare quello avente volume massimo.
5. Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{x\to\infty} x[\ln(x+1) - lnx].$$
6. Determinare i valori del parametro reale k per cui la curva $y = e^{2x} - 8e^x + k$ non ha punti nel semipiano $y < 0$.
7. Sono date $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$ e $g(x) = \frac{x+1}{1-x}$. Calcola $f'(x)$ e $g'(x)$. Confronta e commenta il risultato ottenuto.
8. Nel canto 28 del Paradiso di Dante si legge *«l'incendio suo seguiva ogne scintilla ed eran tante, che 'l numero loro più che il doppiar de li scacchi s'inmilla».* In questi versi, il poeta fa riferimento a un fenomeno di crescita descritto dalla funzione $f(x) = a^x$. Per quali valori di a la funzione è definita e continua su $\mathbb{R}$? Esistono valori di a in corrispondenza dei quali f non è invertibile? Motivare la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche o grafiche purché non siano dotate della capacità di elaborazione simbolica algebrica e non abbiano la disponibilità di connessione a Internet.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.