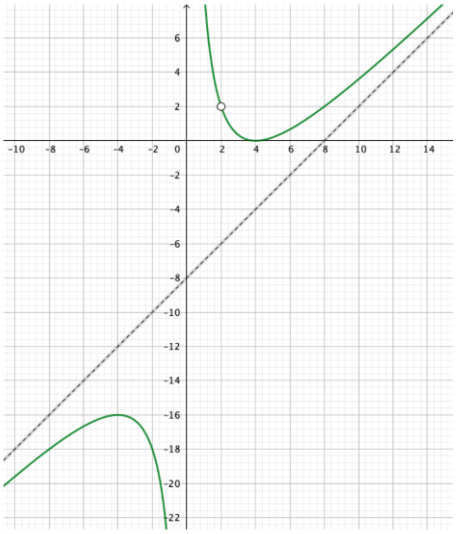
LICEO SCIENTIFICO SUPPLETIVA 2024 - PROBLEMA 1

Si consideri il grafico γ in figura, rappresentativo di una funzione $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, dove $A(x)$ e $B(x)$ sono dei polinomi, definita nel dominio $D = (-\infty;\ 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.



a)

Analizzando il grafico, si deducano lo zero, l'insieme immagine e gli estremi relativi di f. Determinare i valori dei limiti agli estremi del dominio e i valori di $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x)$. Scrivere le equazioni degli asintoti di f.

Lo zero della funzione è $x = 4$.

Insieme immagine: $Im(f) = \{y \in R:\ -\infty < y \le -16,\ 0 \le y < +\infty\}$

Estremi relativi: punto di minimo relativo $x = 4$, con ordinata $y = 0$; punto di massimo relativo $x = -4$ con ordinata $y = -16$.

Limiti agli estremi del dominio.

Il dominio della funzione è: $D = \{x \in R:\ -\infty < x < 0\,,\ 0 < x < 2\,,\ 2 < x < +\infty\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,;\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty\,;\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,;\ \lim_{x\to 2} f(x) = 2\,;\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Osserviamo che la funzione ha l'asintoto obliquo $y = x - 8 = mx + q$, quindi:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=m=1\,;\quad \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=q=-8\,.$$

Asintoti:
Asintoto verticale: $x=0$; asintoto obliquo: $y=x-8$ $(per\ x\to\pm\infty)$; non ci sono asintoti orizzontali.

Osserviamo che la funzione ha in $x=2$ un punto di discontinuità eliminabile (terza specie).

b)

Supponendo che la funzione f abbia equazione

$$y=\frac{a(x-b)^2(x-c)}{x(x-d)}$$

determinare i valori dei parametri a,b,c,d.

Deve essere $d=2$, perché la funzione non è definita per $x=0$ e $x=2$.

Siccome il grafico della funzione è tangente all'asse delle x in $x=4$, tale valore deve essere una radice "multipla", quindi annulla $(x-b)^2$, pertanto $b=4$.

Deve essere $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=m=1$ ed è $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^3}{x^3}=a=1$

Quindi la funzione ha equazione del tipo:

$$y=\frac{(x-4)^2(x-c)}{x(x-2)}$$

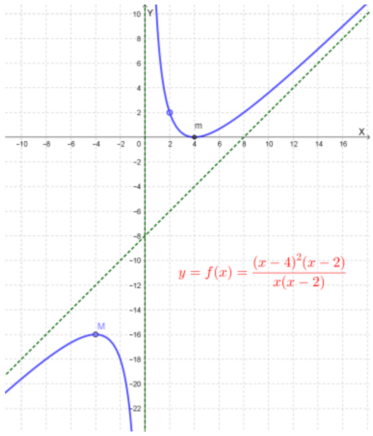
Siccome $x=2$ è un punto discontinuità eliminabile e dal grafico si evince che $\lim_{x\to 2}f(x)=2$, dovrà essere:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-4)^2(x-c)}{x(x-2)}=2\ \ solo\ se\ \ c=2$$

I valori richiesti sono quindi: $a=1,\ b=4,\ c=2,\ d=2$

La funzione ha pertanto equazione:

$y=f(x)=\frac{(x-4)^2(x-2)}{x(x-2)},\ come\ dire\ f(x)=\frac{(x-4)^2}{x}\ \ con\ \ x\neq 2$, il cui grafico è (come indicato nei dati):

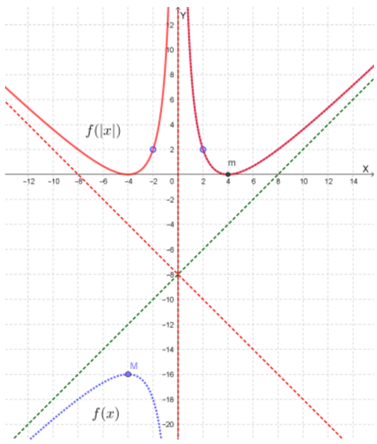


Il grafico γ è quello dell'iperbole di equazione $y = \frac{(x-4)^2}{x}$ privata del punto di coordinate $(2; 2)$.

c)

Dal grafico γ, dedurre i grafici delle funzioni $f(|x|)$ e $ln(f(x))$ specificando, per ciascuna, dominio, asintoti, estremi e insieme immagine.

Il grafico della funzione $f(|x|)$ si ottiene da quello di $f(x)$ confermando la parte con $x > 0$ e ribaltando tale parte rispetto all'asse delle ordinate. Abbiamo quindi il seguente grafico (primo e seguente quadrante):



Dominio di $\boldsymbol{f}(|\boldsymbol{x}|)$: $-\infty < x < +\infty \;\; con \;\; x \neq \pm 2 \;\; e \;\; x \neq 0$

Asintoti: $y = x - 8 \;\; per \; x \to +\infty \;\; e \;\; y = -x - 8 \;\; per \; x \to -\infty \;\; e \;\; x = 0 \;\; destro \; e \; sinistro.$

Estremi: estremo inferiore $y = 0$ $(che \text{ è } minimo \; assoluto)$, estremo superiore $y = +\infty$

$(x = \pm 4 \; punti \; di \; minimo \; relativo \; ed \; assoluto, \qquad con \; ordinata \; y = 0)$

Insieme immagine: $Im(f(|x|) = \{\text{y} \in R : 0 \leq y < +\infty\}$

Grafico di $\boldsymbol{y = ln(f(x))}$

Dominio: $f(x) > 0, quindi: \;\; 0 < x < 2, \;\; 2 < x < 4, \;\; 4 < x < +\infty$

Intersezioni con gli assi cartesiani

Non ci sono intersezioni con l'asse delle y, poiché per $x = 0$ la funzione non esiste
Risulta $y = 0 \;\; se \;\; f(x) = 1: \;\; in \; un \; punto \; compreso \; fra \; 2 \; e \; 4 \; ed \; in \; un \; punto \; fra \; 6 \; e \; 8.$

Limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(f(x)) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 2} \ln(f(x)) = \ln(2), \qquad \lim_{x \to 4} \ln(f(x)) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(f(x)) = +\infty$$

Abbiamo quindi gli asintoti verticali di equazioni: $x = 0$, $x = 4$. *Non ci sono asintoti orizzontali.*

Controlliamo se per $x \to +\infty$ può esserci asintoto obliquo.

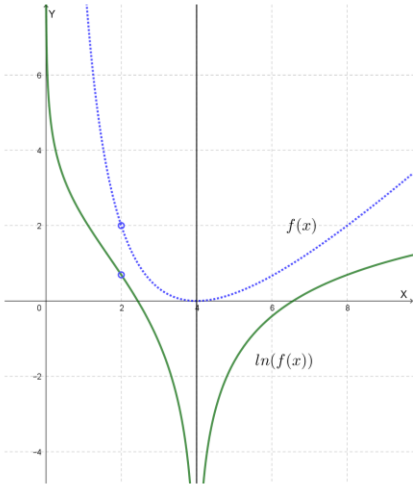
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(f(x))}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{(x-4)^2}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^+$$

($\ln x$ è $infinito\ di\ ordine\ inferiore\ rispetto\ a\ x\ per\ x\to+\infty$: *non ci sono asintoti obliqui*).

Monotonia

La funzione $\ln(f(x))$ decresce dove decresce $f(x)$: $0<x<2,\ 2<x<4$ e cresce dove $f(x)$ cresce: $x>4$. Non ci sono massimi e minimi relativi.

Il grafico di $\ln(f(x))$ è quindi del tipo:



Dominio: $0<x<2,\ 2<x<4,\ 4<x<+\infty$

Asintoti: $x=0\ per\ x\to 0^+,\ x=4\ per\ x\to 4^{\pm}$

Estremi: estremo inferiore $y=-\infty$, estremo superiore $x=+\infty$. Non ci sono minimi locali né massimi locali.

Insieme immagine: $Im(\ln(f(x))=\{y\in R: -\infty<y<+\infty\}$

d)

Si consideri la funzione $F(x)=\int_3^x f(t)\,dt$, *definita nell'intervallo [3;8]. Tracciare un suo grafico rappresentativo* Γ, *specificando l'ascissa del punto di flesso e il coefficiente angolare della retta tangente in tale punto*.

Ricordiamo che la funzione $y=f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[3;8]$.
Per il "*Teorema fondamentale del calcolo integrale*" la funzione $y=F(x)$ è continua e derivabile in [3; 8] ed in ogni punto di tale intervallo si ha: $F'(x)=f(x)$.

Dominio di F: [3; 8]

Valori agli estremi del dominio: $F(3)=\int_3^3 f(t)\,dt=0$; $F(8)=\int_3^8 f(t)\,dt$. Per trovare $F(8)$ occorre quindi cercare una primitiva di $f(x)$.

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{(x-4)^2}{x}dx = \int \frac{x^2-8x+16}{x}dx = \int \left(x-8+\frac{16}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - 8x + 16\ln|x| + k$$

Quindi:

$$F(8) = \int_3^8 f(t)\,dt = \left[\frac{1}{2}x^2 - 8x + 16\ln|x|\right]_3^8 = 32 - 64 + 16\ln 8 - \frac{9}{2} + 24 - 16\ln 3 =$$
$$= -\frac{25}{2} + 16\ln\frac{8}{3} \cong 3.2$$

Monotonia di *F* (basta osservare il segno di f in [3; 8], essendo $F' = f$):

$F'(x) = f(x) \geq 0$ se $3 \leq x \leq 8$: F è sempre crescente.

Concavità di F (basta osservare la monotonia di f in [3; 8]), essendo $F''(x) = f'(x)$):

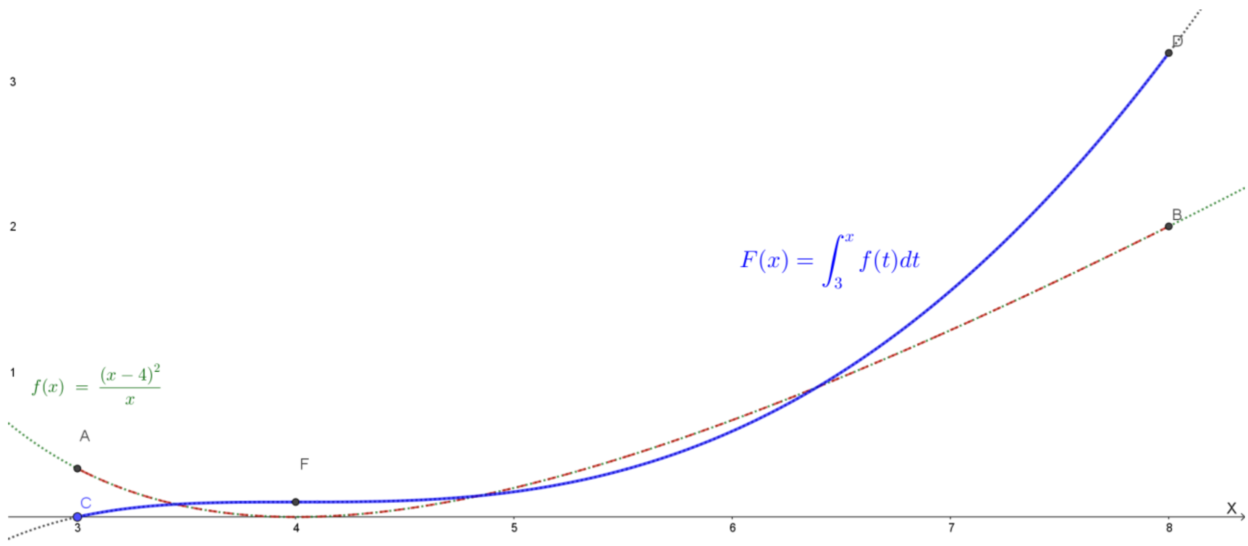
$F''(x) = f'(x) < 0 \ \ se \ \ 3 \leq x < 4, \ F''(x) = 0 \ \ se \ \ x = 4, \ F''(x) > 0 \ \ se \ \ 4 < x \leq 8.$

Il grafico Γ di F volge quindi la concavità verso il basso se $3 < x < 4$, verso l'alto se $4 < x < 8$, ed ha un flesso in $x = 4$.

Coefficiente angolare m della tangente inflessionale:

$m = F'(4) = f(4) = 0$: il flesso ha quindi tangente orizzontale.

Grafico di F:



Giuseppe Scoleri, con la collaborazione di Angela Santamaria