LICEO SCIENTIFICO SUPPLETIVA 2024 - PROBLEMA 2

Si consideri la famiglia di curve $f_a(x) = \frac{x^2-1}{e^{ax}}$, *con a parametro reale non nullo, e si indichi con* Γ_a *il grafico di* f_a .

a)

Verificare che tutti i grafici Γ_a *hanno tre punti in comune e scrivere le loro coordinate.*

Si vede facilmente che le curve passano tutte per i punti $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(0; -1)$.

b)

Al variare del parametro a, *individuare gli intervalli di monotonia di* Γ_a, *le ascisse degli estremi relativi e dei flessi.*

Osserviamo che la funzione $y = f_a(x) = \frac{x^2-1}{e^{ax}}$ è definita, continua e derivabile su tutto R per ogni valore di a.

Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda.

$$\boldsymbol{y'} = \frac{2x(e^{ax}) - (x^2-1)(ae^{ax})}{e^{2ax}} = \frac{a^{ax}(2x - ax^2 + a)}{e^{2ax}} = \frac{2x - ax^2 + a}{e^{ax}} = y'$$

$$\boldsymbol{y''} = \frac{(2-2ax)e^{ax} - (2x - ax^2 + a)(ae^{ax})}{e^{2ax}} = \frac{a^{ax}(2 - 2ax - 2ax + a^2x^2 - a^2)}{e^{2ax}} =$$

$$= \frac{2 - 4ax + a^2x^2 - a^2}{e^{ax}} = y''$$

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio $-\infty < \boldsymbol{x} < +\infty$**:**

Analizziamo separatamente i casi $a > 0$ *e* $a < 0$:

$\boldsymbol{a > 0}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{e^{ax}} = \left[\frac{+\infty}{0^+}\right] = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{e^{ax}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = 0^+$ (e^{ax} è infinito di ordine superiore rispetto ad x^2).

$\boldsymbol{a < 0}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{e^{ax}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = 0^+$ (e^{ax} è infinito di ordine superiore rispetto ad x^2), $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{e^{ax}} = \left[\frac{+\infty}{0^+}\right] = +\infty$

Anche per lo studio della derivata prima analizziamo separatamente i casi $a > 0$ e $a < 0$:

$y' = \dfrac{2x - ax^2 + a}{e^{ax}} \geq 0$ se $2x - ax^2 + a \geq 0,$ $\quad ax^2 - 2x - a \leq 0\,,$ $\quad \dfrac{\Delta}{4} = 1 + a^2 > 0\ \forall\, a$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+a^2}}{a}$: $\quad \dfrac{1 - \sqrt{1+a^2}}{a} \leq x \leq \dfrac{1 + \sqrt{1+a^2}}{a}$

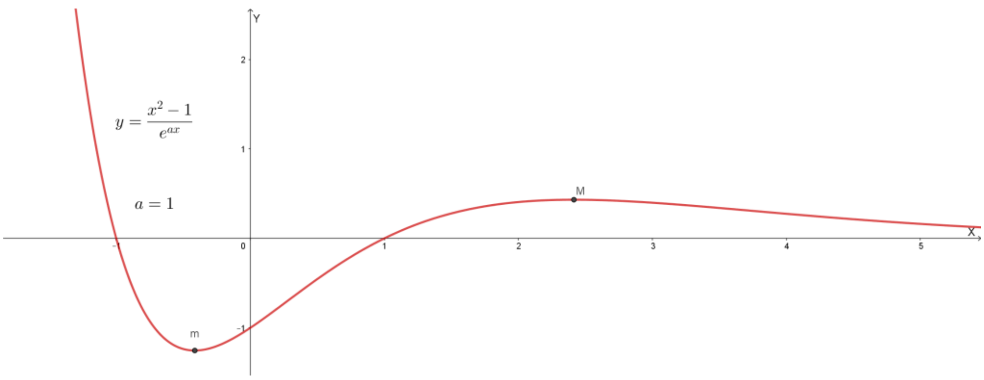
Osserviamo che $\frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a} < 0$ $mentre$ $\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a} > 0.$

Quindi, per $a > 0$: la funzione decresce per $x < \frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a}$ vel $x > \frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a}$, cresce per $\frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a} < x < \frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a}$, pertanto ha un minimo relativo per $x = \frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a}$ ed un massimo relativo per $x = \frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a}$.

Anche se non richiesto, dai limiti agli estremi del dominio possiamo dedurre che:

il punto di minimo relativo è anche assoluto, mentre il punto di massimo relativo non è assoluto.

Il grafico della funzione per $\boldsymbol{a > 0}$ $(\boldsymbol{in\ figura\ a = 1})$ è del tipo:



Cerchiamo eventuali flessi per $\boldsymbol{a > 0}$.

Dal dominio, dai limiti e dagli estremi relativi trovati, essendo la funzione continua su tutto R possiamo affermare che ci sono ALMENO due flessi: uno tra il minimo ed il massimo ed uno dopo il massimo.

Analizziamo la derivata seconda per vedere se ci sono altri flessi.

$y'' = \frac{2-4ax+a^2x^2-a^2}{e^{ax}} \geq 0$ $\quad se \quad a^2x^2 - 4ax + 2 - a^2 \geq 0\,,$ $\frac{\Delta}{4} = 4a^2 - 2a^2 + a^4 \geq 0\,, a^4 + 2a^2 > 0\ \ \forall\, a \neq 0\,.$

$$x=\frac{2a\pm\sqrt{a^4+2a^2}}{a^2}=\frac{2a\pm|a|\sqrt{a^2+2}}{a^2}=\frac{2a\pm a\sqrt{a^2+2}}{a^2}=\frac{2\pm\sqrt{a^2+2}}{a}$$

Quindi: $y''\geq 0\ se\ \ x\leq\frac{2-\sqrt{a^2+2}}{a}\ \ vel\ \ x\geq\frac{2+\sqrt{a^2+2}}{a}$. Pertanto il grafico della funzione volge la concavità verso l'alto se $x<\frac{2-\sqrt{a^2+2}}{a}\ \ vel\ \ x>\frac{2+\sqrt{a^2+2}}{a}$ e verso il basso se $\frac{2-\sqrt{a^2+2}}{a}<x<\frac{2+\sqrt{a^2+2}}{a}$.

Si hanno due punti di flesso in $x=\frac{2-\sqrt{a^2+2}}{a}$ e $x=\frac{2+\sqrt{a^2+2}}{a}$

$\boldsymbol{a<0}$

$$y'=\frac{2x-ax^2+a}{e^{ax}}\geq 0\ \ se\ \ 2x-ax^2+a\geq 0,\qquad -ax^2+2x+a\geq 0\,,\qquad \frac{\Delta}{4}=1+a^2>0\ \ \forall\, a$$

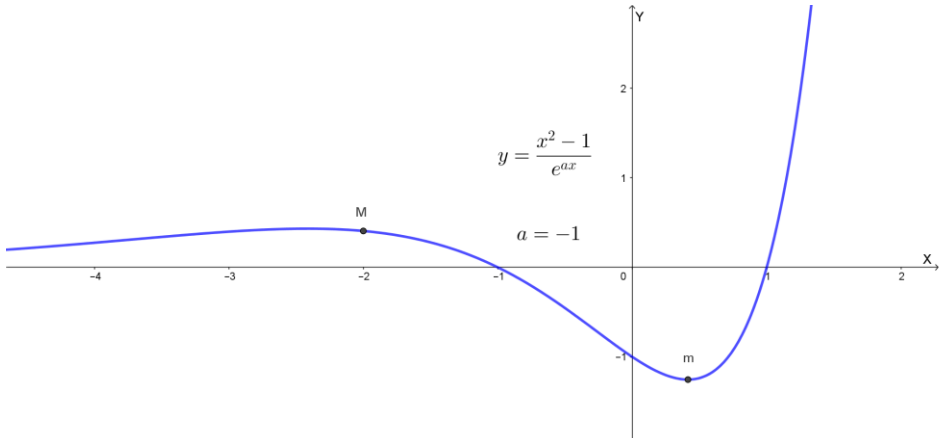
Ricordiamo che $a<0, quindi -a>0$.

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+a^2}}{-a}\ :y'\geq 0\ \ se\quad x\leq\frac{-1-\sqrt{1+a^2}}{-a}\ \ vel\ \ x\geq\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{-a}$$

Quindi, per $a<0$: la funzione cresce per $x<\frac{-1-\sqrt{1+a^2}}{-a}\ \ vel\ \ x>\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{-a}$, decresce per $\frac{-1-\sqrt{1+a^2}}{-a}<x<\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{-a}$, pertanto ha un massimo relativo per $x=\frac{-1-\sqrt{1+a^2}}{-a}$ ed un minimo relativo per $x=\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{-a}$.

Ragionando come nel caso $a>0$ possiamo dire che il minimo relativo è anche assoluto mentre il massimo relativo non è assoluto.

Il grafico della funzione per $\boldsymbol{a<0}$ $(\boldsymbol{in\ figura\ a=-1})$ è del tipo:



Cerchiamo eventuali flessi per $a < 0$.

A tal proposito anticipando la dimostrazione richiesta nel punto d) relativa alla simmetria delle curve Γ_a e Γ_{-a} rispetto all'asse delle ordinate, possiamo affermare che anche per $a < 0$ ci sono due punti di flesso, simmetrici rispetto all'asse delle ordinate dei due punti di flesso trovati per $a > 0$. E precisamente:

per $a < 0$ ci sono due punti di flesso, di ascisse: $x = \frac{+2+\sqrt{a^2+2}}{a}$ e $x = \frac{+2-\sqrt{a^2+2}}{a}$

Dimostriamo che le curve Γ_a e Γ_{-a} sono simmetriche rispetto all'asse delle ordinate

Dobbiamo dimostrare che: $f_a(-x) = f_{-a}(x)$. Risulta:

$f_a(-x) = \frac{(-x)^2-1}{e^{a(-x)}} = \frac{x^2-1}{e^{-ax}} = f_{-a}(x)$ c.v.d.

c)

Determinare i valori del parametro a in modo che il punto F, intersezione di Γ_a con l'asse delle ordinate, sia un punto di flesso. In corrispondenza di tali valori, scrivere le equazioni delle rette tangenti in F.

Il punto F, intersezione di Γ_a con l'asse delle ordinate ha ordinata $f_a(0) = -\frac{1}{e^{a(0)}} = -1$.
Quindi $F = (0; -1)$.

Imponiamo che tale punto sia un punto di flesso.

Ricordiamo che le ascisse dei flessi sono:

per $a > 0$: $x_1 = \frac{2-\sqrt{a^2+2}}{a}$ e $x_2 = \frac{2+\sqrt{a^2+2}}{a}$ e può essere solo $x_1 = 0, quindi: 2 - \sqrt{a^2+2} = 0,$
$2 = a^2, quindi\ (essendo\ a > 0),\ a = \sqrt{2}$

Per $a < 0$: $x_3 = \frac{+2+\sqrt{a^2+2}}{a}$ e $x_4 = \frac{+2-\sqrt{a^2+2}}{a}$ e può essere solo $x_4 = 0, quindi: 2 - \sqrt{a^2+2} = 0,$

$2 = a^2, quindi\ (essendo\ a < 0),\ a = -\sqrt{2}$.

Quindi: i valori di a richiesti sono: $a = \pm\sqrt{2}$, ed il flesso ha coordinate: $F = (0: -1)$.

Cerchiamo le equazioni delle tangenti inflessionali.

Ricordiamo che: $f'(x) = \frac{2x-ax^2+a}{e^{ax}}$ $e\ risulta\ f'(0) = a$

Se $a = \sqrt{2}$ si ha: $f'(0) = \sqrt{2}$, se $a = -\sqrt{2}$ si ha: $f'(0) = -\sqrt{2}$,

Quindi le rette tangenti nel punto di flesso $F = (0; 1)$ sono:

per $a = \sqrt{2}$: $y + 1 = \sqrt{2}(x - 0)$, da cui: $y = \sqrt{2}x - 1$.

per $a=-\sqrt{2}$: $y+1=-\sqrt{2}(x-0)$, da cui: $y=-\sqrt{2}x-1$.

d)

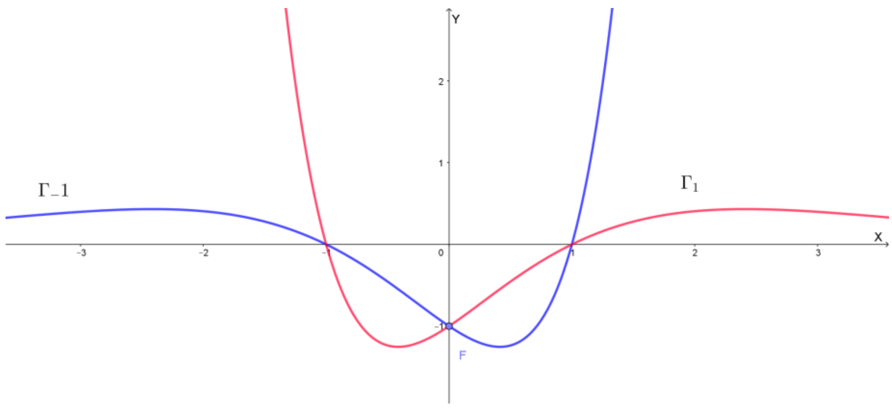
Dimostrare che, per ogni valore di $a \neq 0$, le curve Γ_a e Γ_{-a} sono simmetriche tra loro rispetto all'asse delle ordinate. Determinare l'area della regione finita di piano delimitata dai grafici Γ_1 e Γ_{-1}.

Abbiamo già dimostrato nel punto b) che per ogni valore di $a \neq 0$, le curve Γ_a e Γ_{-a} sono simmetriche tra loro rispetto all'asse delle ordinate.

Determiniamo l'area della regione finita di piano delimitata dai grafici Γ_1 e Γ_{-1}.

Le equazioni delle due curve sono:

Γ_1: $f_1(x)=\frac{x^2-1}{e^x}$, Γ_{-1}: $f_{-1}(x)=\frac{x^2-1}{e^{-x}}$ i cui grafici (già studianti nei punti precedenti) sono in dicati nella figura seguente:



Determiniamo l'area $\mathcal{A}$ della regione finita di piano delimitata dai grafici Γ_1 e Γ_{-1}. Per la simmetria dimostrata risulta:

$$\mathcal{A}=2\int_0^1 (f_1(x)-f_{-1}(x))\,dx=2\int_0^1\left(\frac{x^2-1}{e^x}-\frac{x^2-1}{e^{-x}})\right)dx=2\int_0^1\left(\frac{x^2-1}{e^x}-\frac{x^2-1}{e^{-x}})\right)dx$$

Calcoliamo $\int \frac{x^2-1}{e^x}dx=\int (x^2-1)e^{-x}\,dx$ integrando per parti scegliendo x^2-1 come fattor finito e e^{-x} come fattor differenziale, ricordando schematicamente che $\int fg'\,dx=fg-\int f'\,g dx$.

Nel nostro caso:

$f=x^2-1, quindi\ \ f'=2x\,;\ \ g'=e^{-x}, quindi\ g=-e^{-x}$

$$\int (x^2-1)e^{-x}\,dx=(x^2-1)(-e^{-x})-\int 2x\,((-e^{-x})dx=-e^{-x}(x^2-1)-I$$

Integrando ancora per parti si ha: $\int 2x\,((-e^{-x})dx = 2x(e^{-x}) - \int 2(e^{-x})\,dx = 2xe^{-x} + 2e^{-x} + c$

Quindi:

$$\int \frac{x^2-1}{e^x}dx = \int (x^2-1)e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^2-1) - (2xe^{-x} + 2e^{-x}) + k =$$

$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - e^{-x} + k = -e^{-x}(x^2+2x+1) + k = -e^{-x}(x+1)^2 + k$$

Calcoliamo $\int \frac{x^2-1}{e^{-x}}dx$. Effettuando la sostituzione $-x = t, da\ cui\ dx = -dt$ e tenendo presente il calcolo precedente si ha:

$$\int \frac{t^2-1}{e^t}(-dt) = -\int \frac{t^2-1}{e^t}dt = -[-e^{-t}(t+1)^2] + h = e^{-t}(t+1)^2 + h = e^x(-x+1)^2 + h$$

Si ha perciò:

$$\mathcal{A} = 2\int_0^1 \left(\frac{x^2-1}{e^x} - \frac{x^2-1}{e^{-x}})\right)dx = 2[-e^{-x}(x+1)^2 - e^x(-x+1)^2]_0^1 =$$

$$= 2[-4e^{-1} - 0 - (-1-1)] = 2\left(2 - \frac{4}{e}\right) = \mathcal{A}$$

Giuseppe Scoleri, con la collaborazione di Angela Santamaria