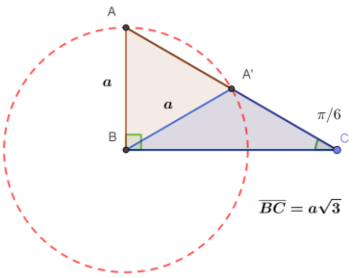
LICEO SCIENTIFICO 2024 - SESSIONE SUPPLETIVA - QUESTIONARIO

QUESITO 1

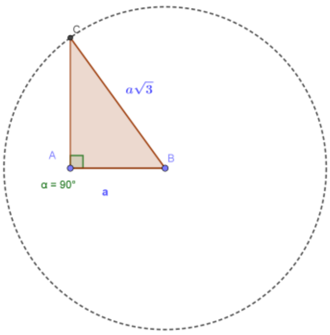
È dato un triangolo ABC di lati $AB = a$ e $BC = \sqrt{3}\,a$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
- Se $A\hat{C}B = \frac{\pi}{6}$, allora il triangolo è rettangolo;
- Se il triangolo è rettangolo, allora $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$.
Motivare le risposte.

1) Costruiamo il segmento BC, perpendicolare ad AB, di lunghezza $a\sqrt{3}$ e con centro in B la circonferenza di raggio a. Congiungiamo C con A, otteniamo il triangolo rettangolo in B ABC (con l'angolo $A\hat{C}B = \frac{\pi}{6}$), ma anche il triangolo $A'BC$, che soddisfa le condizioni imposte ma non è un triangolo rettangolo.



La prima affermazione è quindi FALSA.

2) Se deve essere $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$ il triangolo dovrebbe essere rettangolo in B o in A. Se fosse rettangolo in B effettivamente sarebbe $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$, poiché $\frac{AB}{BC} = \tan\widehat{ACB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (vedi figura precedente). MA il triangolo potrebbe essere rettangolo in A ed avremmo la seguente configurazione:



Da cui: $a = a\sqrt{3}\,\text{sen}\,(\widehat{ACB})$, quindi: $\text{sen}\,(\widehat{ACB}) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e quindi non sarebbe $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$.

Anche la seconda affermazione è quindi FALSA.

QUESITO 2

In un salvadanaio ci sono 15 monete, di cui 9 sono da 1 euro e le altre 6 da 2 euro. Se ne estraggono 6 contemporaneamente.

- Qual è la probabilità che il valore totale delle monete estratte sia esattamente 10 euro?

- Qual è la probabilità che il valore totale delle monete estratte sia al massimo 10 euro?

Prima domanda

I casi possibili sono le combinazioni di 15 oggetti a 6 a 6, quindi $C_{15,6} = \binom{15}{6}$.
Analizziamo i casi favorevoli per ottenere un totale di 10 euro con 6 monete, osservando che non posso avere tutte monete da 1 euro o tutte da 2 euro; inoltre posso avere al massimo 4 monete da 2 euro. Quindi:

4 da 2 euro e 2 da 1 euro: $\boldsymbol{C_{6,4} \cdot C_{9,2} = \binom{6}{4} \cdot \binom{9}{2} = 15 \cdot 36 = 540}$
3 da 2 euro: restano 3 monete da 1 euro e non arriviamo a 10 euro
2 da 2 euro: con 4 monete da 1 euro non arriviamo a 10 euro
1 da 2 euro: con 5 monete da 1 euro non arriviamo a 10 euro.

Quindi abbiamo UNA SOLA CONFIGURAZIONE FAVOREVOLE: 4 MONETE DA 2 EURO E 2 MONETE DA 1 EURO. QUESTA CONFIGURAZIONE SI PUO' OTTENERE IN 540 MODI.

Quindi la probabilità di avere un totale di 10 euro estraendo contemporaneamente 6 monete da un salvadanaio con 9 monete da 1 euro e 6 da 2 euro è:

$$\frac{540}{C_{15,6}} = \frac{540}{5005} \cong 0.108 \cong 10.8\ \%$$

Seconda domanda

Siccome il massimo possibile è 12 euro (le sei monete estratte sono tutte da 2 euro), per avere al massimo 10 euro di totale basta calcolare $1 - p$, dove $p = p(somma\ 11\ euro) + p(somma\ 12\ euro)$.

<u>Calcoliamo $p(somma\ 11\ euro)$</u>.

I casi possibili sono gli stessi del primo caso.

Per calcolare i casi favorevoli osserviamo che anche in questo caso le 6 monete non possono essere tutte da 1 euro o tutte da 2 euro, inoltre le monete da 1 euro devono essere in numero dispari.

Non possiamo avere 5 monete da 1 euro, perché con la rimanente da 2 euro non arriveremmo a 11.
Non possiamo avere 3 monete da 1 euro, perché con le rimanenti tre da 2 euro non arriveremmo a 11.

POSSIAMO avere solo 1 moneta da 1 euro e 5 da 2 euro. Totale casi: $\boldsymbol{9 \cdot C_{6,5} = 9 \cdot 6 = 54}$.

Quindi: $\boldsymbol{p(somma\ 11\ euro) = \frac{54}{C_{15,6}} = \frac{54}{5005}}$

Calcoliamo $p(somma\ 12\ euro)$.

Possiamo avere solo 6 monete da 2 euro. Totale casi: 1

Quindi: $\boldsymbol{p(somma\ 12\ euro) = \frac{1}{C_{15,6}} = \frac{1}{5005}}$

Pertanto: $p = p(somma\ 11\ euro) + p(somma\ 12\ euro) = \frac{54}{5005} + \frac{1}{5005} = \frac{55}{5005} = \frac{11}{1001}$

Segue che:

la probabilità che il valore totale delle monete estratte sia al massimo 10 euro è data da:

$$1 - \frac{11}{1001} = \frac{990}{1001} \cong 0.989 \cong 98{,}9\ \%$$

QUESITO 3

Verificare che i punti $O\ (0,0,0)$, $A\ (1,4,8), B\ (-6,0,12)$ e $C\ (-7,-4,4)$ sono complanari. Calcolare area e perimetro del quadrilatero $OABC$ e classificarlo.

Per verificare che i quattro punti sono complanari determiniamo il piano per O, A e B e, successivamente, verifichiamo che C appartiene a tale piano.

Equazione generale del piano: $ax + by + cz + d = 0$. Imponiamo il passaggio per O, A e B:

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + 4b + 8c + d = 0 \\ -6a + 12c + d = 0 \end{cases};\ \begin{cases} d = 0 \\ a + 4b + 8c = 0 \\ -6a + 12c = 0\ \Rightarrow a = 2c \end{cases};\ \begin{cases} d = 0 \\ 10c + 4b = 0\ \Rightarrow b = -\frac{5}{2}c \\ a = 2c \end{cases};\ \begin{cases} d = 0 \\ b = -\frac{5}{2}c \\ a = 2c \end{cases}$$

Quindi il piano per O, A e B ha equazione: $2cx - \frac{5}{2}cy + cz = 0 \quad \Rightarrow \boldsymbol{4x - 5y + 2z = 0}$

Verifichiamo che C appartiene a tale piano: $4(-7) - 5(-4) + 2(4) = -28 + 20 + 8 = 0:\ \ verificato.$

Il vettore OA ha componenti: $(1 - 0; 4 - 0; 8 - 0) = (1; 4; 8)$. Il vettore BC ha componenti:

$(-6 + 7;\ 0 + 4;\ 12 - 4) = (1; 4;\ 8)$

Quindi i lati OA e BC sono paralleli.

Componenti del vettore AB: $(7; 4;\ -4)$; componenti del vettore OC: $(7; 4;\ -4)$.

Quindi i lati AB e CO sono paralleli: OABC è un parallelogramma.

Calcoliamo le misure dei lati:

$\overline{OA} = \sqrt{1 + 16 + 64} = 9$; $\overline{AB} = \sqrt{49 + 16 + 16} = 9$

Il parallelogramma ha quindi due lati consecutivi uguali, perciò è un rombo. Controlliamo se è un quadrato verificando se due lati consecutivi (come OA e AB) sono perpendicolari. Il vettore OA ha componenti (1; 4; 8), il vettore AB ha componenti (7; 4; -4). Il loro prodotto scalare è dato da:

$(1)(7) + (4)(4) + (8)(-4) = 7 + 16 - 32 \neq 0$:

il parallelogramma OABC non è quindi un quadrato, pertanto (avendo i quattro lati uguali) è un ROMBO.

Calcoliamo le misure delle diagonali OB e AC:

$\overline{OB} = \sqrt{36 + 0 + 144} = 6\sqrt{5}$; $\overline{AC} = \sqrt{64 + 64 + 16} = 12$.

L'area del rombo (semiprodotto delle diagonali) è quindi:

$$Area(OABC) = \frac{6\sqrt{5} \cdot 12}{2} = 36\sqrt{5}\ u^2$$

Il perimetro del quadrilatero (rombo di lato 9) è:

$2p(OABC) = 36\,u$.

QUESITO 4

Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln\left(\frac{ax-7}{x^2}\right)$ *con a parametro reale positivo. Successivamente, individuare il valore di a in corrispondenza del quale risultano soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo* $[1; 7]$ *e le coordinate del punto che ne verifica la tesi.*

Dominio: deve essere: $\frac{ax-7}{x^2} > 0$, *da cui*: $x > \frac{7}{a}$ (essendo $a > 0$).

La funzione è continua e derivabile per ogni $x > \frac{7}{a}$ *con* $a > 0$. Affinché valga il Teorema di Rolle nell'intervallo $[1; 7]$ deve essere $f(1) = f(7)$, quindi: $\ln(a - 7) = ln\left(\frac{7a-7}{49}\right)$, da cui:

$$a - 7 = \frac{a-1}{7}, \qquad 7a - 49 = a - 1\ ,\ \ 6a = 48\text{: } a = 8.$$

La funzione deve quindi avere equazione:

$f(x) = \ln\left(\frac{8x-7}{x^2}\right)$ che è definita, continua e derivabile per $x > \frac{7}{8}$. Quindi, per $a = 8$ la funzione nell'intervallo $[1; 7]$ soddisfa le tre ipotesi del Teorema di Rolle:

1) Continua in $[1; 7]$
2) Derivabile in $(1; 7)$
3) $f(1) = f(7)$

Esiste quindi almeno un punto c interno all'intervallo dato in cui $f'(c) = 0$.

Ma risulta: $f'(x)=\frac{1}{\frac{8x-7}{x^2}}\left(\frac{8x^2-2x(8x-7)}{x^4}\right)=\frac{x^2}{8x-7}\left(\frac{-8x^2+14x}{x^4}\right)=\frac{-8x^2+14x}{x^2(8x-7)}=0\ \ se\ \ -8x^2+14x=0$:

$x=0\ (non\ accettabile)\ e\ x=\frac{7}{4}=c$. Risulta $f\left(\frac{7}{4}\right)=ln\left(\frac{7}{\frac{49}{16}}\right)=\ln\left(\frac{16}{7}\right)$.

Le coordinate del punto che soddisfano il Teorema di Rolle in [1; 7] sono quindi: $\left(\frac{7}{4};\ ln\left(\frac{16}{7}\right)\right)$.

QUESITO 5

Determinare i valori dei parametri reali a e b della funzione $f(x)=\frac{ax^2+bx+3}{2x^2+5x-1}$ *in modo che essa abbia la retta* $y=2$ *come asintoto orizzontale e un punto stazionario per* $x=1$*. In corrispondenza dei valori trovati, stabilire se* $f(x)$ *presenta ulteriori asintoti.*

Affinché ci sia l'asintoto $y=2$ deve essere: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=2$ (ciò implica che non può essere $a=0$).

Ma $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2}{2x^2}=\frac{a}{2}=2\ \ se\ \ a=4$.

Quindi: $f(x)=\frac{4x^2+bx+3}{2x^2+5x-1}$. Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x)=\frac{(8x+b)(2x^2+5x-1)-(4x^2+bx+3)(4x+5)}{(2x^2+5x-1)^2}$$

Affinché ci sia un punto stazionario per $x=1$ deve essere $f'(1)=0$, quindi:

$$f'(1)=\frac{(8+b)(2+5-1)-(4+b+3)(4+5)}{(2+5-1)^2}=\frac{6(8+b)-9(7+b)}{36}=0, \qquad da\ cui:$$

$$6(8+b)-9(7+b)=0, -3b-15=0\,, \qquad b=-5$$

La funzione ha quindi equazione: $f(x)=\frac{4x^2-5x+3}{2x^2+5x-1}$

Oltre all'asintoto orizzontale indicato la funzione può avere solo degli asintoti verticali. Annulliamo il denominatore:

$$2x^2+5x-1=0, \qquad x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$$

Il numeratore $4x^2-5x+3$ non si annulla mai, essendo $\Delta=25-48<0$.

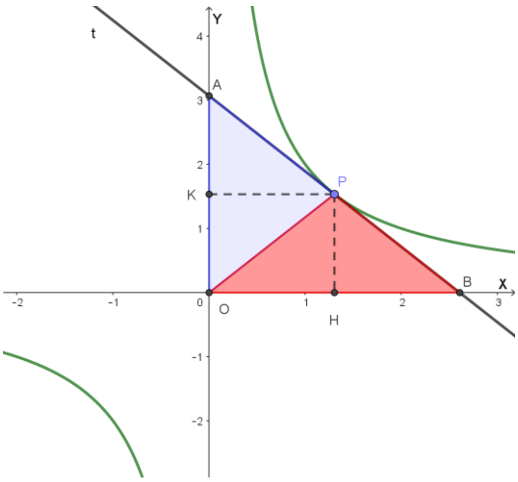
Quindi si hanno gli asintoti verticali di equazioni $x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$.

QUESITO 6

In un sistema di assi cartesiani Oxy, si consideri l'iperbole equilatera di equazione $xy = k$, con k parametro reale non nullo. Sia t la retta tangente all'iperbole in un suo punto P. Detti A e B i punti in cui t interseca gli assi del riferimento, dimostrare che i triangoli APO e BPO sono equivalenti e che la loro area non dipende dalla scelta di P.

Sia $P = (a; b)$ $con\ ab = k$ il generico punto dell'iperbole. Utilizzando la formula di sdoppiamento otteniamo velocemente l'equazione della tangente t in P all'iperbole: $\frac{ay+bx}{2} = k,\ bx + ay - 2k = 0.$

Il punto A, intersezione di t con l'asse delle y ha coordinate: $A = \left(0; \frac{2k}{a}\right)$ mentre il punto B, intersezione di t con l'asse delle x ha coordinate: B= $\left(\frac{2k}{b}; 0\right)$. La situazione grafica, supponendo $k > 0$ è la seguente:



Risulta:

$$Area(BPO) = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{PH}}{2} = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{2k}{b}\right| \cdot |b|\right) = |k|$$

$$Area(APO) = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{PK}}{2} = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{2k}{a}\right| \cdot |a|\right) = |k|$$

Quindi i due triangoli sono equivalenti e la loro area non dipende dalla scelta di P.

Dimostrazione col metodo delle derivate.

A partire da $xy = k, con\ k \neq 0, x \neq 0\ e\ y \neq 0$, consideriamo la funzione di equazione $y = f(x) = \frac{k}{x}$.
Poniamo come prima $P(a; b)\ con\ ab = k$ Si ha $t: y - f(a) = f'(a)(x - a);\ \ y - b = -\frac{k}{a^2}(x - a)$.
Ponendo $x = 0$ otteniamo $y = \frac{k}{a} + b$, quindi l'intersezione della tangente con l'asse delle ordinate ha coordinate: $A = \left(0; \frac{k}{a} + b\right)$.
Se poniamo $y = 0$ nell'equazione della tangente otteniamo: $-b = -\frac{kx}{a^2} + \frac{k}{a}$, $-a^2b = -kx + ka;$

$kx = a^2b + ka,\;\; x = \frac{a^2b}{k} + a$, quindi l'intersezione della tangente con l'asse delle ascisse ha coordinate: $B = \left(\frac{a^2b}{k} + a;\; 0\right)$. Risulta pertanto:

$$Area(BPO) = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{PH}}{2} = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{a^2b}{k} + a\right| \cdot |b|\right) = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{a^2b^2}{k} + ab\right|\right) = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{k^2}{k} + k\right|\right) = |k|$$

$$Area(APO) = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{PK}}{2} = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{k}{a} + b\right| \cdot |a|\right) = \frac{1}{2}(|k + ab|) = \frac{1}{2}(|k + k|) = |k|$$

Come si può facilmente vedere questo procedimento è meno veloce del primo.

N. B.

Esiste una proprietà dell'iperbole generica secondo cui *l'area del triangolo formato dal centro dell'iperbole e dalle intersezioni della tangente in un qualsiasi punto P dell'iperbole con i suoi asintoti è costante al variare di P*. Nel nostro caso tale triangolo ha area costante $|2k|$.

QUESITO 7

Un resistore di resistenza R è percorso da una corrente variabile nel tempo di intensità $I(t) = I_0\,\frac{a}{t}$*, con* $t > 0$ *e le costanti positive* I_0 *e a espresse, rispettivamente, in ampère e in secondi. Sapendo che la potenza dissipata nel resistore per effetto Joule è* $P(t) = RI^2(t)$*, determinarne il valor medio nell'intervallo* $[2a; 3a]$.

Cerchiamo il valor medio di $P(t) = RI^2(t)$ nell'intervallo $[2a; 3a]$, con $a > 0$ e $t > 0$.

Osserviamo che la funzione $P(t) = RI^2(t) = \frac{RI_0^2a^2}{t^2}$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[2a; 3a]$,

quindi, in base al *Teorema della media del calcolo integrale* il valor medio richiesto è dato da:

$$\frac{1}{3a - 2a}\int_{2a}^{3a} RI^2(t)\,dt = \frac{1}{a}\int_{2a}^{3a} R\,\left(I_0\,\frac{a}{t}\right)^2 dt = \frac{1}{a}(RI_0^2a^2)\int_{2a}^{3a}\frac{1}{t^2}dt = RI_0^2a\left[-\frac{1}{t}\right]_{2a}^{3a} =$$

$= RI_0^2a\left(-\frac{1}{3a} + \frac{1}{2a}\right) = RI_0^2a\left(\frac{1}{6a}\right) = \frac{1}{6}RI_0^2$: valor medio richiesto (in watt).

QUESITO 8

Scrive Leonardo Sinisgalli, in un brano tratto da Furor Mathematicus*: «Avevo in mente un capitolo sulle leggi del caso: volevo trovare le parentele tra il triangolo di Tartaglia, relativo ai coefficienti del polinomio $(a+b)^n$ e il triangolo aritmetico di Pascal, che ci dà la probabilità di fare m volte croce in n partite giuocate a testa e croce».*
Descrivere il legame esistente tra i coefficienti binomiali ed il calcolo delle probabilità.

Ricordiamo che lo sviluppo della potenza del binomio $(a+b)^n$ è dato da:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Il generico coefficiente di questo polinomio in a e b, $\binom{n}{k}$, rappresenta le combinazioni di n oggetti a k a k ed è definito nel modo seguente:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = per\ definizione = \binom{n}{k}$$

Il termine "coefficiente binomiale" che si dà a questa espressione deriva dal fatto che rappresenta il generico coefficiente dello sviluppo della potenza ennesima del binomio $(a+b)$.

Il legame fra i coefficienti binomiali ed il calcolo delle probabilità può essere ricondotto alla distribuzione binomiale, in cui si calcola la probabilità che un evento E, di probabilità p, si verifichi k volte su n prove (effettuate nelle stesse condizioni). Ponendo $p = 1 - q$ (probabilità dell'evento contrario di E), si ha:

Probabilità di avere k "successi" in n prove = $p_{k,n} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Da tale espressione emerge il legame tra i coefficienti binomiali ed il calcolo delle probabilità.

Nell'esempio indicato nel testo (*probabilità di fare m volte croce in n partite giocate a testa e croce*) si ha:

$$p_{m,n} = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$$

Giuseppe Scoleri, con la collaborazione di Angela Santamaria