

LICEO SCIENTIFICO – SUPPLETIVA 2026 – PROBLEMA 2

Soluzione proposta da Giuseppe Scoleri

www.matefilia.it

Testo del problema

Si considerino la funzione $y = f(x)$, derivabile in $\mathbb{R}$, e le funzioni $g(x) = -\frac{1}{f(x)}$ e $h(x) = f(x) + g(x)$; si indichino con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, rispettivamente, i grafici delle funzioni f, g, h .

a)

Dimostrare che, se α e β sono gli zeri di f , allora le rette di equazione $x = \alpha$ e $x = \beta$ sono asintoti sia per g che per h . Spiegare perché γ_1 non ha punti in comune né con γ_2 né con γ_3 . Infine, dimostrare che se x_s è ascissa di un punto stazionario per f , con $f(x_s) \neq 0$, allora lo è anche per g e h .

Soluzione del punto a

Poiché α e β sono gli zeri di f , risulta $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

Asintoti per g :

Essendo $g(x) = -\frac{1}{f(x)}$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \left(-\frac{1}{f(x)} \right) = -\frac{1}{0} = \infty$$

dunque la retta $x = \alpha$ è asintoto verticale per γ_2 . In modo analogo si dimostra che anche $x = \beta$ è asintoto verticale per γ_2 .

Asintoti per h :

Essendo $h(x) = f(x) + g(x)$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) + g(x)] = 0 + \infty = \infty$$

quindi anche $x = \alpha$ è asintoto verticale per γ_3 ; analogamente si prova che $x = \beta$ è asintoto verticale per γ_3 .

γ_1 **non ha punti in comune con** γ_2 :

Un'eventuale intersezione tra γ_1 e γ_2 richiederebbe $f(x) = g(x)$, cioè:

$$f(x) = -\frac{1}{f(x)} \Rightarrow [f(x)]^2 = -1$$

equazione priva di soluzioni reali. Dunque $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$.

γ_1 **non ha punti in comune con** γ_3 :

Un'eventuale intersezione tra γ_1 e γ_3 richiederebbe $f(x) = h(x)$, cioè:

$$f(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = 0$$

equazione impossibile, poiché una frazione con numeratore non nullo non può essere uguale a zero. Dunque $\gamma_1 \cap \gamma_3 = \emptyset$.

Punti stazionari:

Sia x_s ascissa di un punto stazionario per f , con $f(x_s) \neq 0$; risulta quindi $f'(x_s) = 0$.

Calcoliamo la derivata di g :

$$g'(x) = D\left(-\frac{1}{f(x)}\right) = D(-[f(x)]^{-1}) = \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

Quindi:

$$g'(x_s) = \frac{f'(x_s)}{[f(x_s)]^2} = \frac{0}{[f(x_s)]^2} = 0$$

(il denominatore è ben definito e non nullo poiché $f(x_s) \neq 0$). Dunque x_s è ascissa di un punto stazionario anche per g .

Essendo $h = f + g$, risulta $h' = f' + g'$, quindi:

$$h'(x_s) = f'(x_s) + g'(x_s) = 0 + 0 = 0$$

Pertanto x_s è ascissa di un punto stazionario anche per h .

Conclusione:

Le rette $x = \alpha$ e $x = \beta$ sono asintoti verticali sia per g che per h ; γ_1 non ha punti in comune né con γ_2 né con γ_3 ; ogni ascissa di punto stazionario per f , con $f(x_s) \neq 0$, è ascissa di punto stazionario anche per g e per h .

b)

Stabilito che f è una funzione polinomiale di 2° grado, scrivere le espressioni analitiche delle tre funzioni sapendo che $f(0) = -1$, la retta di equazione $x = -1$ è asintoto per γ_2 e $x = -\frac{1}{4}$ è ascissa di un punto stazionario per h .

Soluzione del punto b

Poiché f è polinomiale di 2° grado, poniamo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Dalla condizione $f(0) = -1$ segue $c = -1$, quindi:

$$f(x) = ax^2 + bx - 1$$

Condizione sull'asintoto di γ_2 :

Essendo $g(x) = -\frac{1}{f(x)}$, la retta $x = -1$ è asintoto per g se e solo se $f(-1) = 0$:

$$a - b - 1 = 0$$

Condizione sul punto stazionario di h :

Essendo $h = f + g$, risulta $h' = f' + g'$, con $g' = \frac{f'}{[f(x)]^2}$. Poiché $x = -\frac{1}{4}$ è punto stazionario per h , e $f'(-\frac{1}{4}) = -\frac{a}{2} + b$, imponendo $h'(-\frac{1}{4}) = 0$:

$$f'(-\frac{1}{4}) + g'(-\frac{1}{4}) = \left(-\frac{a}{2} + b\right) + \frac{-\frac{a}{2} + b}{[f(-\frac{1}{4})]^2} = 0$$

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$\frac{(-a + 2b)/2}{[f(-\frac{1}{4})]^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -a + 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2b$$

Risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} a - b - 1 = 0 \\ a = 2b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2b - b - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 1, \quad a = 2$$

Le tre funzioni risultano quindi:

$$f(x) = 2x^2 + x - 1$$

$$g(x) = -\frac{1}{2x^2 + x - 1}$$

$$h(x) = f(x) + g(x) = 2x^2 + x - 1 - \frac{1}{2x^2 + x - 1} = \frac{(2x^2 + x - 1)^2 - 1}{2x^2 + x - 1}$$

Applicando la differenza di quadrati al numeratore:

$$(2x^2 + x - 1)^2 - 1 = (2x^2 + x - 2)(2x^2 + x) = x(2x + 1)(2x^2 + x - 2)$$

quindi:

$$h(x) = \frac{x(2x + 1)(2x^2 + x - 2)}{2x^2 + x - 1}$$

Conclusione:

$$f(x) = 2x^2 + x - 1 \quad g(x) = -\frac{1}{2x^2 + x - 1} \quad h(x) = \frac{x(2x + 1)(2x^2 + x - 2)}{2x^2 + x - 1}$$

D'ora in avanti, si ponga $f(x) = 2x^2 + x - 1$.

c)

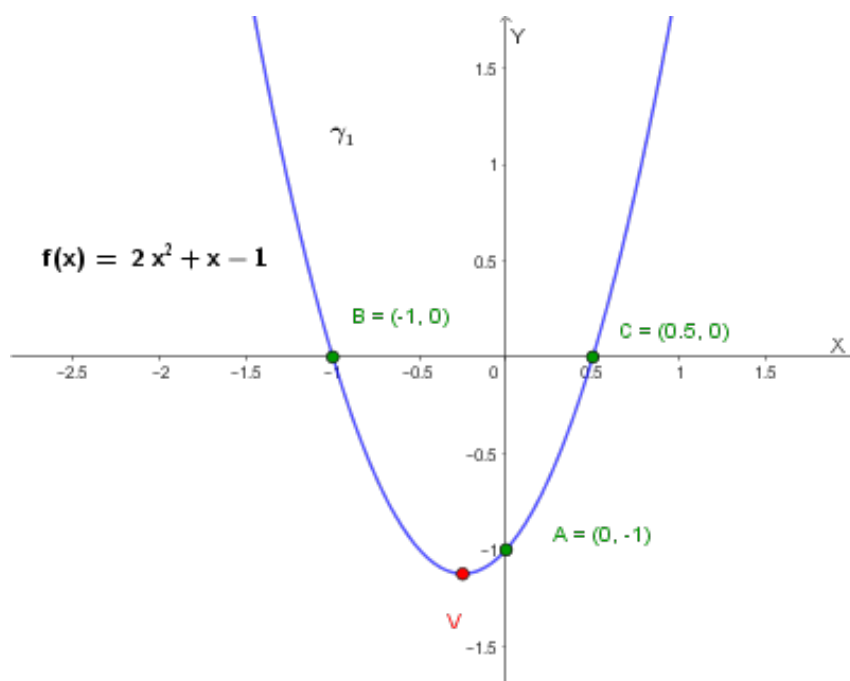
Si tracci il grafico γ_1 e se ne deducano i grafici γ_2 e γ_3 , specificando intersezioni con gli assi cartesiani, asintoti ed estremi. Verificare se le tre curve presentano flessi.

Soluzione del punto c

Studio di γ_1 (grafico di f):

$f(x) = 2x^2 + x - 1$ è una parabola con concavità verso l'alto ($a = 2 > 0$).

- Intersezioni con l'asse x : $2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow x = -1, x = \frac{1}{2}$. Punti $B(-1, 0), C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
- Intersezione con l'asse y : $f(0) = -1$. Punto $A(0, -1)$.
- Vertice (minimo assoluto): $x_V = -\frac{1}{4}, f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{8}$. Punto $V\left(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{8}\right)$.
- Nessun flesso: $f''(x) = 4$ è costante e positiva, quindi la concavità non cambia mai.

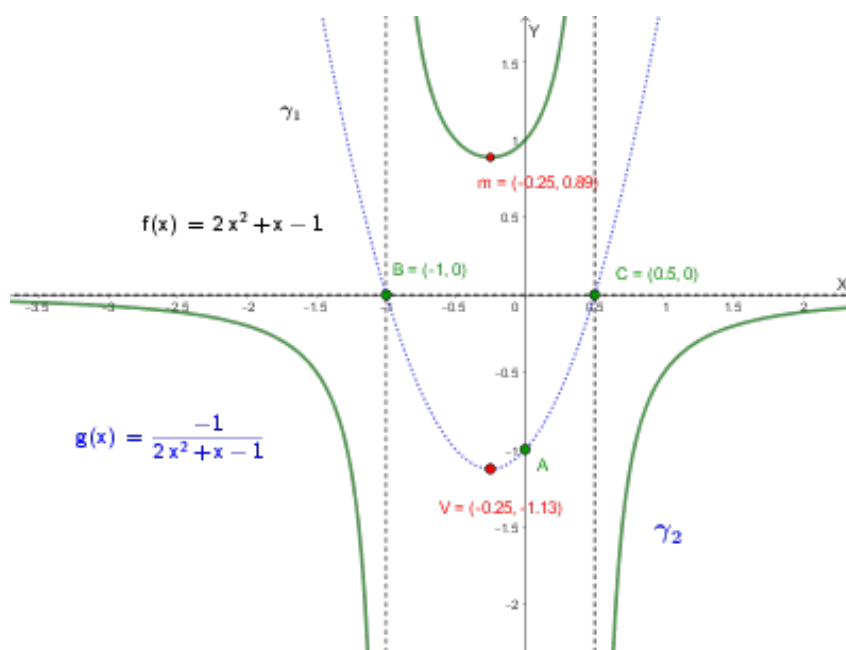


Studio di γ_2 (grafico di g):

$$g(x) = -\frac{1}{2x^2 + x - 1} = -\frac{1}{(x+1)(2x-1)}, \text{ con dominio } x \neq -1, x \neq \frac{1}{2}.$$

- Asintoti verticali: $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$ (dimostrato al punto a).
- Asintoto orizzontale: per $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$ quindi $g(x) \rightarrow 0^-$; asintoto $y = 0$.
- Intersezione con l'asse y : $g(0) = 1$. Punto $(0, 1)$.
- Nessuna intersezione con l'asse x (numeratore mai nullo).
- Segno: $g(x) > 0$ per $-1 < x < \frac{1}{2}$ (dove $f < 0$); $g(x) < 0$ per $x < -1$ o $x > \frac{1}{2}$.
- Estremo: $g'(x) = \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 0$ solo per $x = -\frac{1}{4}$ (unico punto stazionario di f), interno all'intervallo $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$. Poiché $g'(x)$ ha lo stesso segno di $f'(x)$ (essendo $[f(x)]^2 > 0$), g ha lo stesso andamento di monotonia di f : decrescente per $x < -1$ e per $-1 < x < -\frac{1}{4}$, crescente per $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$ e per $x > \frac{1}{2}$; quindi un **minimo** in $x = -\frac{1}{4}$: $g\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{-9/8} = \frac{8}{9}$. Punto di minimo $\left(-\frac{1}{4}, \frac{8}{9}\right)$.
- Nessun flesso: $g''(x) = -\frac{6(4x^2 + 2x + 1)}{(2x^2 + x - 1)^3}$; ponendo $g''(x) = 0$ si ottiene $4x^2 + 2x + 1 = 0$, con discriminante negativo $\Rightarrow$ nessuna soluzione reale.

Grafico qualitativo di $g(x)$ dedotto dal grafico di $f(x)$:



Studio di γ_3 (grafico di $h = f + g$):

Dominio: $x \neq -1, x \neq \frac{1}{2}$ (stesso di g).

- Intersezione con l'asse y : $h(0) = f(0) + g(0) = -1 + 1 = 0$. γ_3 passa per l'origine $O(0, 0)$.

- Intersezioni con l'asse x : $h(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -g(x) = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow [f(x)]^2 = 1 \Rightarrow f(x) = \pm 1$.

Da $f(x) = -1$: $2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(2x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\frac{1}{2}$.

Da $f(x) = 1$: $2x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$ (due soluzioni irrazionali, circa $x \approx -1,28$ e $x \approx 0,78$).

In totale quattro zeri: $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}, x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$.

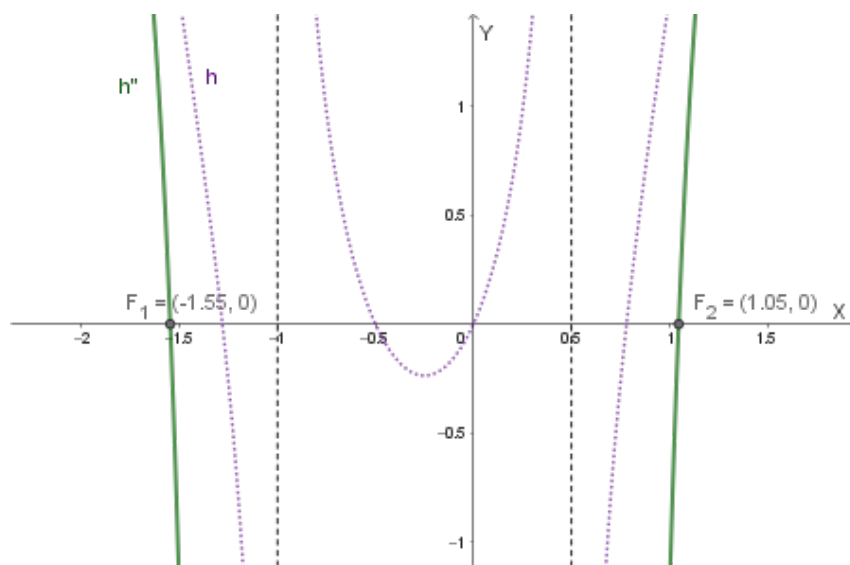
- Asintoti verticali: $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$ (dimostrato al punto a).
- Asintoto obliquo (parabolico): per $x \rightarrow \pm\infty, g(x) \rightarrow 0$; poiché $h(x) = f(x) + g(x)$, risulta che $h(x)$ è asintotico a $f(x)$. Quindi, per $x \rightarrow \pm\infty$, il grafico di h si avvicina asintoticamente al grafico di f : si può dire che γ_1 (il grafico di f) è asintoto parabolico per γ_3 (il grafico di h).
- Estremo: $h'(x) = f'(x) + g'(x) = f'(x) \left(1 + \frac{1}{[f(x)]^2}\right) = \frac{f'(x) ([f(x)]^2 + 1)}{[f(x)]^2}$. Poiché $[f(x)]^2 + 1 > 0$ sempre, il segno di h' coincide con quello di f' : unico punto stazionario in $x = -\frac{1}{4}$, **minimo**.

$$h\left(-\frac{1}{4}\right) = f\left(-\frac{1}{4}\right) + g\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{8} + \frac{8}{9} = -\frac{17}{72}$$

Punto di minimo $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{17}{72}\right)$.

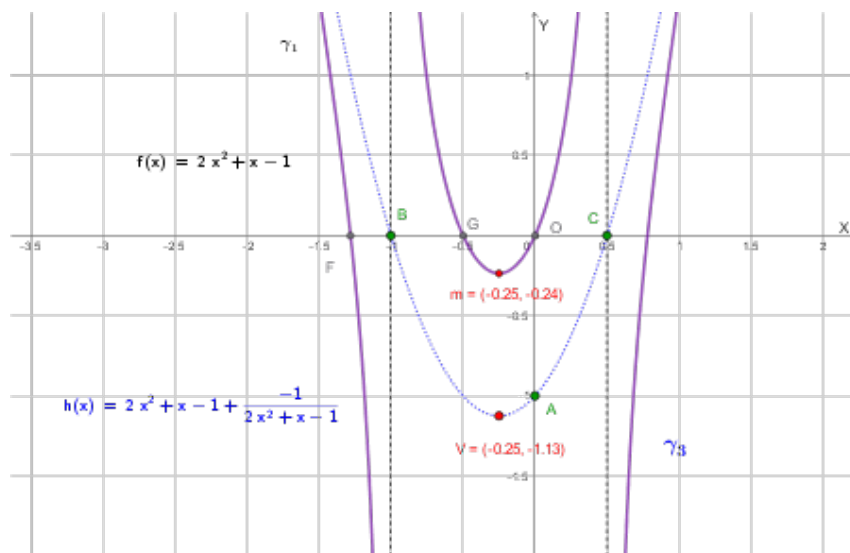
- Flessi: il calcolo diretto di $h''(x)$ risulta piuttosto laborioso; conviene ragionare per confronto. Poiché $h(x)$ è asintotico a $f(x)$ per $x \rightarrow \pm\infty$, il grafico di h ha concavità verso l'alto (come f) sia per $x \rightarrow -\infty$ sia per $x \rightarrow +\infty$. D'altra parte, per $x \rightarrow -1^-$ risulta $h(x) \rightarrow -\infty$, e in prossimità dell'asintoto verticale la concavità è rivolta verso il basso; dunque, per $x < -1$, la concavità passa da verso il basso (vicino a $x = -1$) a verso l'alto (per $x \rightarrow -\infty$): per il teorema dei valori intermedi applicato a h'' , esiste quindi **almeno un punto di flesso** in tale intervallo (un numero dispari di cambi di concavità, non necessariamente uno solo). Analogamente, per $x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+$ risulta $h(x) \rightarrow -\infty$ con concavità verso il basso, mentre per $x \rightarrow +\infty$ la concavità torna verso l'alto: anche per $x > \frac{1}{2}$ esiste quindi **almeno un punto di flesso**.

Calcolando $h''(x)$ (calcolo laborioso, che omettiamo) e visualizzandone il grafico con una calcolatrice grafica, si scopre che $h''(x)$ si annulla esattamente due volte, nei punti $F_1 \approx (-1,55, 0)$ e $F_2 \approx (1,05, 0)$, coerentemente con gli intervalli individuati sopra:



Quindi γ_3 presenta **esattamente due punti di flesso**, in corrispondenza di $x_{F_1} \approx -1,55$ e $x_{F_2} \approx 1,05$, le cui ascisse esatte non sono esprimibili in forma elementare.

Grafico qualitativo di $h(x)$ dedotto dal grafico di $f(x)$:



Conclusione:

γ_1 : parabola, $V\left(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{8}\right)$, nessun flesso.

γ_2 : asintoti $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$; minimo $\left(-\frac{1}{4}, \frac{8}{9}\right)$; nessun flesso.

γ_3 : asintoti $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$; minimo $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{17}{72}\right)$; esattamente due flessi

$$(x \approx -1,55 \text{ e } x \approx 1,05).$$

d)

Determinare i coefficienti reali A, B tali che $g(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1}$. Successivamente, determinare l'area della regione delimitata da γ_2 e dalla retta di equazione $y = \frac{8}{5}$.

Soluzione del punto d

Determinazione di A e B :

Scomponiamo il denominatore: $2x^2 + x - 1 = 2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x+1)(2x-1)$, quindi:

$$g(x) = -\frac{1}{(x+1)(2x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} = \frac{A(2x-1) + B(x+1)}{(x+1)(2x-1)}$$

Deve essere $A(2x-1) + B(x+1) = -1$, cioè $(2A+B)x + (-A+B) = -1$ per ogni x , da cui il sistema:

$$\begin{cases} 2A + B = 0 \\ -A + B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -2A \\ -3A = -1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = -\frac{2}{3}$$

Quindi:

$$g(x) = \frac{1/3}{x+1} + \frac{-2/3}{2x-1}$$

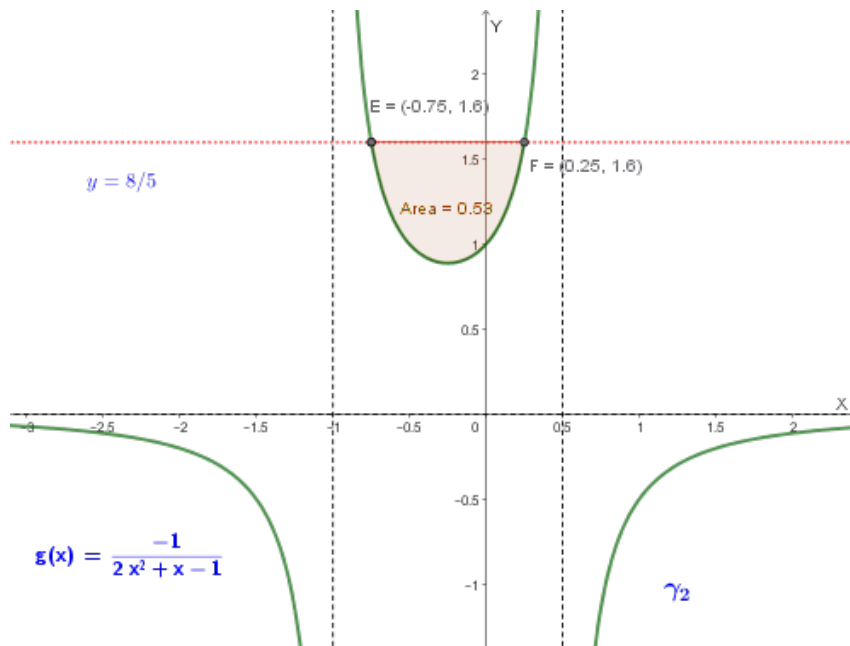
Intersezioni tra γ_2 e la retta $y = \frac{8}{5}$:

Imponiamo $g(x) = \frac{8}{5}$, cioè $-\frac{1}{f(x)} = \frac{8}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{5}{8}$:

$$2x^2 + x - 1 = -\frac{5}{8} \Rightarrow 2x^2 + x - \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow 16x^2 + 8x - 3 = 0$$

$$\Delta = 64 + 192 = 256 \Rightarrow x = \frac{-8 \pm 16}{32} \Rightarrow x = \frac{1}{4}, x = -\frac{3}{4}$$

Punti di intersezione: $E\left(-\frac{3}{4}, \frac{8}{5}\right), F\left(\frac{1}{4}, \frac{8}{5}\right)$.



Calcolo dell'area:

Nell'intervallo $\left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right]$ la retta $y = \frac{8}{5}$ sta al di sopra di γ_2 (ad esempio in $x = 0$: $g(0) = 1 < \frac{8}{5}$), quindi:

$$\text{Area} = \int_{-3/4}^{1/4} \left[\frac{8}{5} - g(x) \right] dx = \int_{-3/4}^{1/4} \frac{8}{5} dx - \int_{-3/4}^{1/4} g(x) dx$$

Il primo integrale vale:

$$\int_{-3/4}^{1/4} \frac{8}{5} dx = \frac{8}{5} \left[\frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4} \right) \right] = \frac{8}{5} \cdot 1 = \frac{8}{5}$$

Per il secondo integrale, usando la scomposizione trovata:

$$\int g(x) dx = \int \left(\frac{1/3}{x+1} - \frac{2/3}{2x-1} \right) dx = \frac{1}{3} \ln |x+1| - \frac{1}{3} \ln |2x-1| = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+1}{2x-1} \right|$$

Calcolando tra gli estremi:

$$\left[\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+1}{2x-1} \right| \right]_{-3/4}^{1/4} = \frac{1}{3} \ln \frac{5/4}{1/2} - \frac{1}{3} \ln \frac{1/4}{5/2} = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2} - \frac{1}{3} \ln \frac{1}{10} = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{5/2}{1/10} \right) = \frac{1}{3} \ln(25) = \frac{2}{3} \ln 5$$

Quindi:

$$\text{Area} = \frac{8}{5} - \frac{2}{3} \ln 5 \approx 1,6 - 1,073 \approx 0,527$$

Conclusione:

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Area} = \frac{8}{5} - \frac{2}{3} \ln 5 \approx 0,527$$

Soluzione a cura di Giuseppe Scoleri – www.matefilia.it