

LICEO SCIENTIFICO – SUPPLETIVA 2026

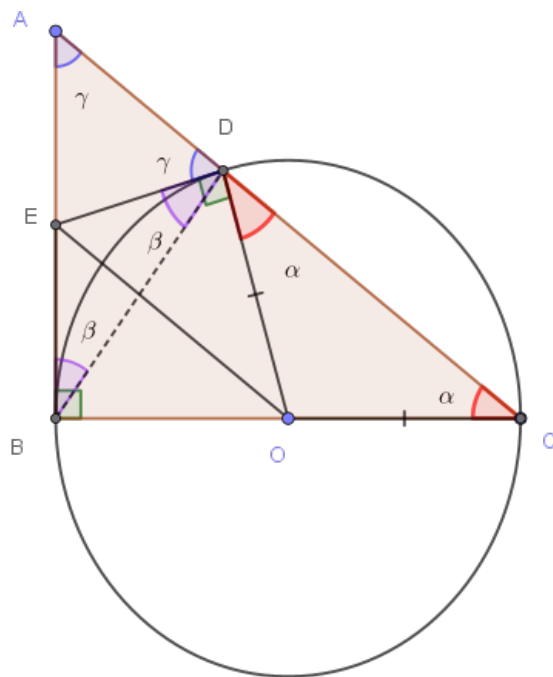
QUESTIONARIO

Soluzione proposta da Giuseppe Scoleri

Quesito 1

Si consideri un triangolo ABC , retto in B . La circonferenza di diametro BC interseca AC in D e la tangente a questa circonferenza in D interseca AB in E . Determinare il rapporto tra AE e BE .

Soluzione



Poniamo $\widehat{BAC} = \gamma$ e $\widehat{ACB} = \alpha$ (con $\alpha + \gamma = 90^\circ$, essendo il triangolo retto in B); indichiamo con O il centro della circonferenza (punto medio di BC , raggio R).

Passo 1 – AB è tangente alla circonferenza in B . Poiché BC è diametro, il raggio OB giace sulla retta BC . Essendo il triangolo retto in B , risulta $AB \perp BC$, quindi $AB \perp OB$: dunque AB è tangente alla circonferenza in B .

Passo 2 – $EB = ED$. Il triangolo OBE è retto in B (Passo 1), il triangolo ODE è retto in D (tangente perpendicolare al raggio). I due triangoli condividono l'ipotenusa OE e hanno un cateto uguale, $OB = OD = R$ (entrambi raggi). Per il criterio ipotenusa-cateto, i triangoli sono congruenti:

$$OBE \cong ODE \quad \Rightarrow \quad EB = ED \quad (\text{e } \widehat{OEB} = \widehat{OED} = \beta)$$

Passo 3 – Il triangolo ODC è isoscele. Essendo $OD = OC = R$ (entrambi raggi), il triangolo ODC è isoscele sulla base DC , quindi gli angoli alla base sono uguali:

$$\widehat{ODC} = \widehat{OCD} = \widehat{ACB} = \alpha$$

Passo 4 – L'angolo $\widehat{EDC}$. Essendo ED tangente in D , risulta $ED \perp OD$, cioè $\widehat{EDO} = 90^\circ$. Poiché la semiretta DO è interna all'angolo $\widehat{EDC}$ (come si vede dalla figura):

$$\widehat{EDC} = \widehat{EDO} + \widehat{ODC} = 90^\circ + \alpha$$

Passo 5 – L'angolo $\widehat{ADE}$. Poiché A, D, C sono allineati ($D \in AC$), gli angoli $\widehat{ADE}$ e $\widehat{EDC}$ sono supplementari:

$$\widehat{ADE} = 180^\circ - \widehat{EDC} = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha = \gamma$$

Passo 6 – Il triangolo AED è isoscele. Nel triangolo AED : l'angolo in A è $\widehat{DAE} = \widehat{BAC} = \gamma$ (essendo $E \in AB$ e $D \in AC$); l'angolo in D è $\widehat{ADE} = \gamma$ (Passo 5). Essendo i due angoli uguali, il triangolo è isoscele, con lati opposti uguali:

$$AE = ED$$

Passo 7 – Conclusione. Combinando con $EB = ED$ (Passo 2):

$$AE = ED = EB$$

Conclusione: $AE = EB$, quindi $\frac{AE}{BE} = 1$

Soluzione alternativa

1) $AB \perp BC$ e BC è diametro $\Rightarrow AB$ tangente alla circonferenza in B .

2) EB ed ED sono entrambi segmenti di tangente condotti dal punto esterno E alla circonferenza $\Rightarrow EB = ED$, e il triangolo BED è isoscele con $\widehat{EBD} = \widehat{EDB} = \beta$.

3) L'angolo $\widehat{EDB} = \beta$, tra la tangente ED e la corda DB , è un angolo alla circonferenza (con un lato tangente e uno secante) che insiste sull'arco BD contenuto nell'angolo stesso; anche $\widehat{BCD} = \alpha$ è un angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco BD . Essendo angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco, sono uguali:

$$\beta = \widehat{EDB} = \widehat{BCD} = \alpha$$

4) BC è diametro $\Rightarrow \widehat{BDC} = 90^\circ$ (angolo alla semicirconferenza) $\Rightarrow \widehat{ADB} = 90^\circ$ (supplementare).

5) Nel triangolo ADB , retto in D :

$$\widehat{ADE} = \widehat{ADB} - \widehat{EDB} = 90^\circ - \beta = 90^\circ - \alpha = \gamma$$

6) Nel triangolo AED : $\widehat{DAE} = \gamma$ e $\widehat{ADE} = \gamma \Rightarrow$ triangolo isoscele su $AD \Rightarrow AE = ED$.

Quindi $AE = ED = EB$, da cui:

$$\frac{AE}{BE} = 1$$

Quesito 2

Nello spazio riferito a un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$, sono dati il punto $A(1, 0, 2)$ e la retta r definita dalle seguenti equazioni:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = -t + 3 \end{cases}$$

Si richiede di:

- a) determinare l'equazione del piano perpendicolare a r e passante per A ;
- b) calcolare la distanza fra le rette r e s , dove s è la retta parallela a r e passante per A .

Soluzione

Punto a)

La retta r ha vettore direttore $\vec{v}_r = (1, 2, -1)$, ricavabile dai coefficienti di t nelle equazioni parametriche. Il piano π perpendicolare a r e passante per A ha come vettore normale proprio $\vec{v}_r$. Usando l'equazione del piano per un punto con normale assegnato:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

con $(a, b, c) = (1, 2, -1)$ e $A(1, 0, 2)$:

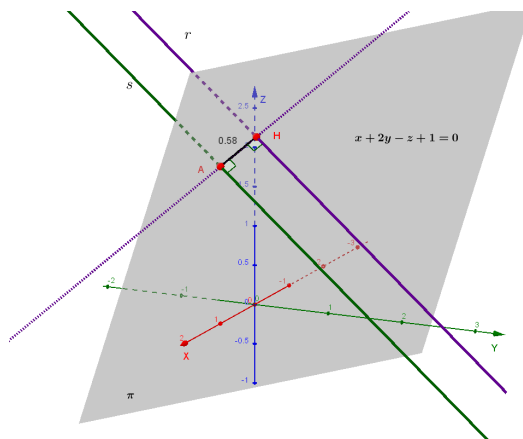
$$1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 0) - 1 \cdot (z - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y - z + 1 = 0$$

Punto b)

La retta s , parallela a r e passante per A , ha equazioni parametriche (parametro h):

$$s : \begin{cases} x = x_A + h = 1 + h \\ y = y_A + 2h = 2h \\ z = z_A - h = 2 - h \end{cases}$$

Poiché $\pi \perp r$, $\pi \perp s$ (essendo $s \parallel r$) e $A \in \pi$, la distanza tra le rette parallele r e s è uguale alla lunghezza del segmento AH , dove $H = r \cap \pi$ è il piede della perpendicolare condotta da A a r .



Determiniamo H sostituendo le equazioni parametriche di r in $\pi: x + 2y - z + 1 = 0$:

$$t + 2(2t - 1) - (-t + 3) + 1 = 0 \Rightarrow 6t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

Sostituendo $t = \frac{2}{3}$ nelle equazioni di r :

$$H = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3} - 1, -\frac{2}{3} + 3 \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

Calcoliamo infine la distanza AH :

$$\overrightarrow{AH} = H - A = \left(\frac{2}{3} - 1, \frac{1}{3} - 0, \frac{7}{3} - 2 \right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$AH = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Conclusione:

a) $\pi: x + 2y - z + 1 = 0$

b) $\text{dist}(r, s) = AH = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Quesito 3

La legge $C(t) = at \cdot e^{-bt}$ descrive la concentrazione di un farmaco (misurata in mg/l), al variare del tempo (misurato in ore). Il picco si stima dopo 5 ore dalla somministrazione con un valore di 5,5 mg/l. Determinare, con due cifre significative, i valori dei parametri a e b e le loro unità di misura. Si può affermare che la concentrazione si mantiene al di sopra di 3,0 mg/l per oltre 10 ore? Motivare la risposta.

Soluzione

Determinazione di b (condizione di massimo in $t = 5$). Calcoliamo la derivata di $C(t) = at e^{-bt}$:

$$C'(t) = a e^{-bt} + at(-b e^{-bt}) = a e^{-bt}(1 - bt)$$

Poiché $a \neq 0$ e $e^{-bt} > 0$, i punti stazionari si hanno per $1 - bt = 0$. Imponendo che il massimo sia in $t = 5$:

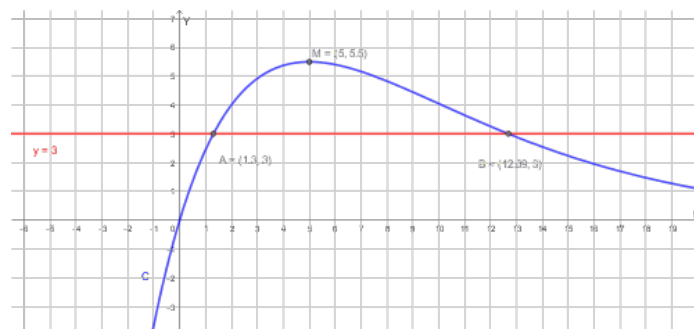
$$1 - 5b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{5} = 0,20 \text{ h}^{-1}$$

Determinazione di a (condizione sul valore di picco). Imponendo $C(5) = 5,5$:

$$5,5 = 5a e^{-1} \Rightarrow a = \frac{5,5e}{5} = 1,1e \approx 2,99 \approx 3,0 \frac{\text{mg}}{\text{l} \cdot \text{h}}$$

Unità di misura. Poiché at deve avere le stesse unità di C , cioè mg/l, e t è in ore, l'unità di a è mg/(lh). L'esponente bt deve essere adimensionale, quindi b ha unità h^{-1} .

Studio qualitativo del grafico. Con $a \approx 1,1e$ e $b = 0,2$, si ha $C(0) = 0$; dal segno di $C'(t) = a e^{-0,2t}(1 - 0,2t)$ risulta C crescente per $t < 5$ e decrescente per $t > 5$, con massimo $C(5) = 5,5$ mg/l; inoltre $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0^+$ (l'esponenziale prevale sul termine lineare). Il grafico qualitativo di $C(t)$ e della retta $y = 3$ è del tipo seguente:



Verifica della permanenza sopra 3,0 mg/l per oltre 10 ore. Dal grafico, la retta $y = 3$ interseca $y = C(t)$ in due punti t_1 e t_2 , con $1 < t_1 < 2$ e $12 < t_2 < 13$. Utilizzando una calcolatrice grafica si trovano le soluzioni dell'equazione $1,1e \cdot t \cdot e^{-0,2t} = 3$:

$$t_1 \approx 1,30 \text{ h} \quad t_2 \approx 12,69 \text{ h}$$

Quindi la concentrazione resta sopra 3,0 mg/l per un intervallo di ampiezza:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \approx 12,69 - 1,30 \approx 11,4 \text{ h}$$

Conclusione: $a \approx 3,0 \frac{\text{mg}}{\text{l} \cdot \text{h}}$, $b = 0,20 \text{ h}^{-1}$

Sì, la concentrazione si mantiene sopra 3,0 mg/l per circa 11,4 ore, quindi per oltre 10 ore.

Quesito 4

Determinare i parametri reali a, b, c in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ae^{2-x} + b, & x < 2 \\ \frac{x+c}{x}, & x \geq 2 \end{cases}$$

sia continua su $\mathbb{R}$ e abbia in $x = 2$ un punto angoloso con tangente sinistra di equazione $y = -3 - 6x$ e tangente destra con pendenza $m = 8$.

Soluzione

Continuità in $x = 2$. La funzione è continua su tutto $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ (composizione di funzioni continue); resta da imporre la continuità in $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = ae^{2-2} + b = a + b \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = \frac{2+c}{2}$$

Imponendo l'uguaglianza:

$$a + b = \frac{2+c}{2} \quad (\star)$$

Derivata sinistra in $x = 2$. Per $x < 2$: $f'(x) = -ae^{2-x}$, quindi:

$$f'_-(2) = -ae^0 = -a$$

La tangente sinistra $y = -3 - 6x$ ha pendenza -6 , quindi:

$$-a = -6 \Rightarrow a = 6$$

Derivata destra in $x = 2$. Per $x > 2$: $f(x) = \frac{x+c}{x}$, quindi $f'(x) = \frac{x-(x+c)}{x^2} = -\frac{c}{x^2}$:

$$f'_+(2) = -\frac{c}{4}$$

Imponendo $f'_+(2) = 8$:

$$-\frac{c}{4} = 8 \Rightarrow c = -32$$

Determinazione di b . Sostituendo $a = 6$ e $c = -32$ nella $(\star)$:

$$6 + b = \frac{2-32}{2} = -15 \Rightarrow b = -21$$

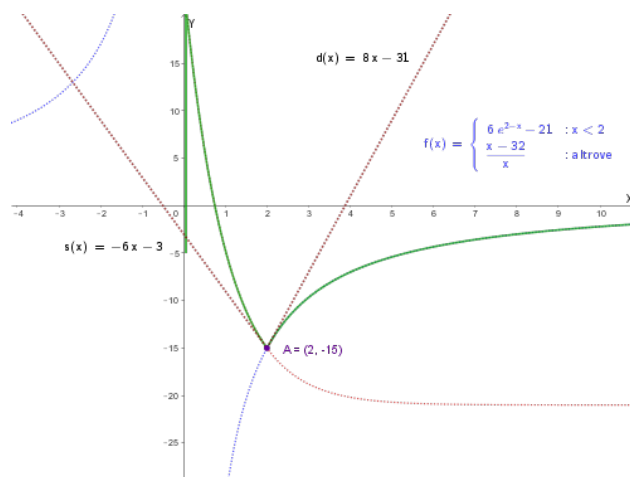
Verifica: $f(2) = a + b = 6 - 21 = -15$, coerente con la retta tangente sinistra $y = -3 - 6x$ in $x = 2$: $y = -3 - 12 = -15 \checkmark$.

Conclusione: $a = 6$, $b = -21$, $c = -32$

La funzione richiesta ha quindi equazione:

$$f(x) = \begin{cases} 6e^{2-x} - 21 & x < 2 \\ \frac{x-32}{x} & x \geq 2 \end{cases}$$

ed il suo grafico (insieme alle semitangenti sinistra e destra) è il seguente:



Quesito 5

Si consideri la curva $y = e^{1+ax}$, con $a \neq 0$, e la retta r ad essa tangente in un punto P . Indicato con A il punto in cui r incontra l'asse delle ascisse, dimostrare che il segmento AH , dove H è la proiezione ortogonale di P sull'asse x , ha lunghezza costante.

Esprimere questa lunghezza in funzione di a .

Soluzione

Sia $P(t, e^{1+at})$ il generico punto della curva, con $t \in \mathbb{R}$.

Equazione della retta tangente r in P . Da $y = e^{1+ax}$ si ha $y' = a e^{1+ax}$, quindi il coefficiente angolare della tangente in P è $m = a e^{1+at}$:

$$r : y - e^{1+at} = a e^{1+at}(x - t)$$

Raccogliendo e^{1+at} a secondo membro:

$$y = e^{1+at} [1 + a(x - t)] = e^{1+at} (ax - at + 1)$$

Determinazione di $A = r \cap \{y = 0\}$. Poiché $e^{1+at} \neq 0$, imponendo $y = 0$:

$$ax - at + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{at - 1}{a} = t - \frac{1}{a}$$

quindi $A\left(t - \frac{1}{a}, 0\right)$.

Determinazione di H . H è la proiezione ortogonale di P sull'asse x , quindi $H(t, 0)$.

Calcolo di AH .

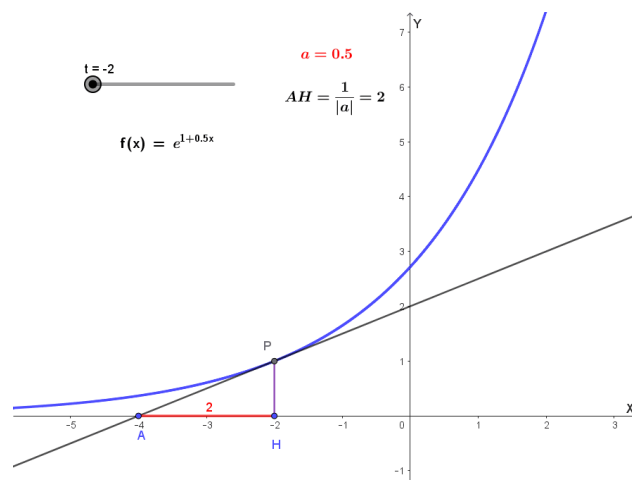
$$\overline{AH}^2 = \left(t - \frac{1}{a} - t\right)^2 + 0^2 = \left(-\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}$$

Il risultato non dipende da t , quindi non dipende dal punto P scelto sulla curva: $\overline{AH}$ ha lunghezza costante.

$$\overline{AH} = \sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{|a|}$$

Conclusione: $\overline{AH} = \frac{1}{|a|}$, costante e indipendente dal punto P scelto.

La seguente immagine illustra il risultato per $a = 0,5$: al variare di P lungo la curva, il segmento AH si sposta ma la sua lunghezza resta sempre pari a $\frac{1}{|a|} = 2$.



Quesito 6

Studiare al variare del parametro $m \in \mathbb{R}$, con $m \neq \pm 1$, la natura dei punti stazionari del polinomio $P(x) = (m^2 - 1)(x - 1)^2(x - 4) + 2$.

Soluzione

Calcolo della derivata.

$$P'(x) = (m^2 - 1) \left[2(x - 1)(x - 4) + 2(x - 4)(x - 1)^2 \right]$$

Raccogliendo $2(x - 1)(x - 4)$:

$$P'(x) = (m^2 - 1) \cdot 2(x - 1)(x - 4) [(x - 4) + (x - 1)] = 2(m^2 - 1)(x - 1)(x - 4)(2x - 5)$$

Studio del segno del fattore $g(x) = (x - 1)(x - 4)(2x - 5)$. Gli zeri sono $x = 1$, $x = \frac{5}{2}$, $x = 4$. Studiando il segno dei tre fattori:

- $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$
- $x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$
- $2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$

Schema dei segni di $g(x)$:

		1		5/2		4		x
x-1	-	•	+		+		+	
x-4	-		-		-	•	+	
2x-5	-		-	•	+		+	
g(x)	-	0	+	0	-	0	+	

Quindi $g(x)$, che si annulla in $x = 1$, $x = \frac{5}{2}$ e $x = 4$, ha il seguente segno:

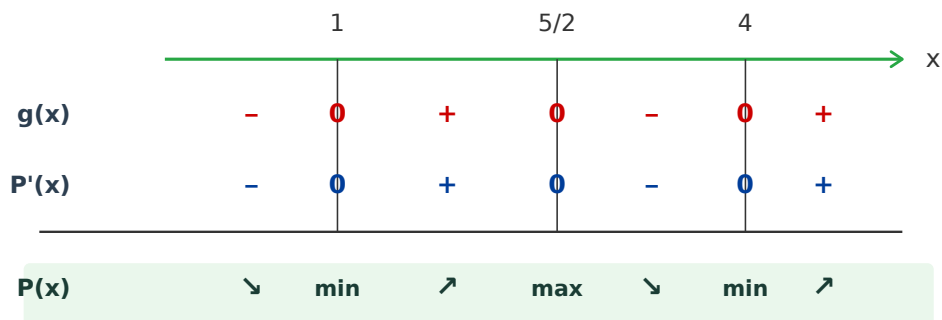
$$x < 1: \quad g(x) < 0$$

$$1 < x < \frac{5}{2}: \quad g(x) > 0$$

$$\frac{5}{2} < x < 4: \quad g(x) < 0$$

$$x > 4: \quad g(x) > 0$$

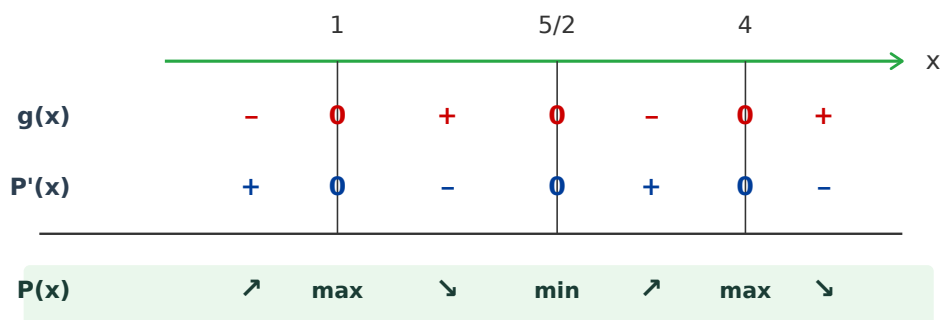
Caso $m^2 - 1 > 0$ (cioè $m < -1$ oppure $m > 1$). In questo caso $P'(x)$ ha lo stesso segno di $g(x)$:



Quindi:

- in $x = 1$: **minimo relativo**;
- in $x = \frac{5}{2}$: **massimo relativo**;
- in $x = 4$: **minimo relativo**.

Caso $m^2 - 1 < 0$ (cioè $-1 < m < 1$). In questo caso $P'(x)$ ha segno opposto a quello di $g(x)$:



Quindi:

- in $x = 1$: **massimo relativo**;
- in $x = \frac{5}{2}$: **minimo relativo**;
- in $x = 4$: **massimo relativo**.

Conclusione:

Se $m < -1$ oppure $m > 1$: minimi relativi in $x = 1$ e $x = 4$; massimo relativo in $x = \frac{5}{2}$.

Se $-1 < m < 1$: massimi relativi in $x = 1$ e $x = 4$; minimo relativo in $x = \frac{5}{2}$.

Quesito 7

Daniele e Letizia stanno giocando a Monopoli. Daniele si trova nella casella “Corso Magellano”. Qual è la probabilità che Daniele, lanciando due dadi regolari a sei facce:

- possa ottenere somma 7 e finire così nella casella “In prigione”?
- non ottenga somma 8, 9 o 11, evitando così di capitare sulle proprietà di Letizia?
- possa ottenere lo stesso valore su entrambi i dadi e quindi giocare un altro turno?

Soluzione

Lanciando due dadi regolari a sei facce, i possibili esiti (ordinati) sono $6 \times 6 = 36$, tutti equiprobabili.

Probabilità di ottenere somma 7. Il 7 si ottiene con le seguenti coppie:

$$(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3) \Rightarrow 6 \text{ casi favorevoli}$$

$$P(\text{somma} = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Probabilità di non ottenere somma 8, 9 o 11. Calcoliamo le probabilità dei tre eventi (fra loro incompatibili, poiché la somma non può assumere contemporaneamente due valori diversi):

$$P(8) : (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4) \Rightarrow \frac{5}{36}$$

$$P(9) : (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4) \Rightarrow \frac{4}{36}$$

$$P(11) : (5, 6), (6, 5) \Rightarrow \frac{2}{36}$$

Essendo eventi incompatibili:

$$P(8 \cup 9 \cup 11) = \frac{5 + 4 + 2}{36} = \frac{11}{36}$$

Per l'evento complementare:

$$P(\text{non } 8, 9, 11) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$$

Probabilità di ottenere lo stesso valore su entrambi i dadi. I casi favorevoli sono le coppie $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$, cioè 6 casi:

$$P(\text{stesso valore}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Conclusione:

$$P(\text{somma} = 7) = \frac{1}{6} \quad P(\text{non } 8, 9, 11) = \frac{25}{36} \quad P(\text{stesso valore}) = \frac{1}{6}$$

Quesito 8

Si consideri la biblioteca di Babele costituita da micro-libri contenenti solo 100 caratteri totali, scritti usando un alfabeto di 22 caratteri (21 lettere e lo spazio).

- a) Quanti sono i possibili micro-libri distinti che si possono scrivere?
- b) Qual è la probabilità che, estraendo un libro a caso, i primi 5 caratteri formano esattamente la parola “TORRE”?

Soluzione

Ipotesi aggiuntiva: assumiamo, come naturale per un “libro”, che lo spazio non possa essere né il primo né l’ultimo carattere del micro-libro.

Punto a) – Conteggio dei micro-libri distinti.

Il primo carattere deve essere una lettera (non lo spazio): 21 possibilità. Analogamente, anche il centesimo carattere (l’ultimo) deve essere una lettera: 21 possibilità. I restanti 98 caratteri (dal 2° al 99°) possono essere uno qualsiasi dei 22 simboli, con ripetizione ammessa: 22 possibilità ciascuno.

$$N_{\text{tot}} = 21 \cdot 22^{98} \cdot 21 = 21^2 \cdot 22^{98}$$

Punto b) – Probabilità che i primi 5 caratteri siano “TORRE”.

Fissiamo i primi 5 caratteri come “TORRE” (tutte lettere, quindi la condizione sul primo carattere è automaticamente rispettata). Restano da determinare i 95 caratteri successivi:

- dal 6° al 99° carattere (94 posizioni): 22 possibilità ciascuno, con ripetizione;
- il 100° carattere: deve essere una lettera (non spazio), quindi 21 possibilità.

Numero di micro-libri favorevoli:

$$N_{\text{fav}} = 22^{94} \cdot 21$$

La probabilità richiesta è quindi:

$$P_b = \frac{N_{\text{fav}}}{N_{\text{tot}}} = \frac{21 \cdot 22^{94}}{21^2 \cdot 22^{98}} = \frac{1}{21 \cdot 22^4}$$

Conclusione:

a) $N_{\text{tot}} = 21^2 \cdot 22^{98}$

b) $P_b = \frac{1}{21 \cdot 22^4}$