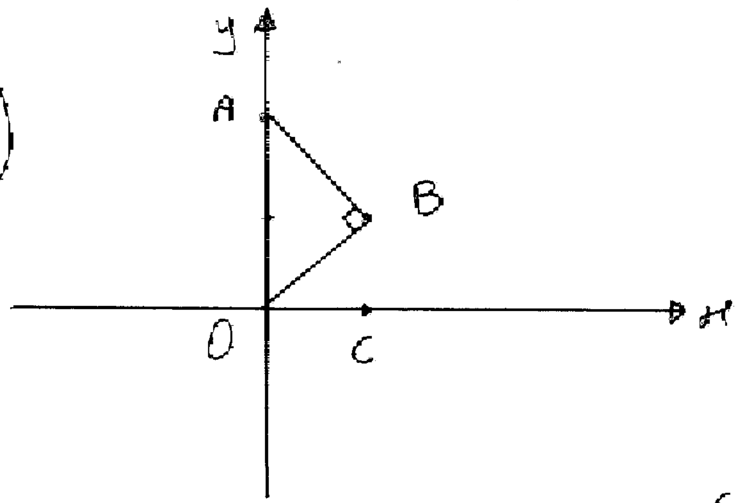
QUESITO 2

$A(0;2) \quad B(1;1) \quad C(1;0)$

a)



si verifica facilmente che $AB \perp OC$ quindi l'ordinata del centro di γ è 1;

il raggio della circonferenza inscritta si può ottenere con la formula $R = \frac{S}{p}$, essendo S l'area del triangolo e p il semiperimetro; $\overline{AB} = \overline{OC} = \sqrt{2}$

$$p = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = \sqrt{2}+1 \Rightarrow \quad \left\{ R = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \boxed{\sqrt{2}-1} \right.$$

$$S = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \Rightarrow$$

Il centro ha quindi coordinate $(\sqrt{2}-1;\, 1)$; γ ha pertanto equazione

$$\boxed{(x-\sqrt{2}+1)^2 + (y-1) = (\sqrt{2}-1)^2}$$

b) α; $O \to O$, $C \to C$, $B \to A$

$$\alpha \begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$$

con $ad - bc \neq 0$

α, imponendo che si corrispondano i punti suddetti, avrà equazione

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2y \end{cases}$$

rapporto di affinità $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

quindi si tratta di un'affinità diretta che "raddoppia" le aree.

c) $\mathcal{A}(CAA') = 2 \cdot \mathcal{A}(CBA) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

d) Punti uniti: $\begin{cases} x = x - y \\ y = 2y \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 0}$

rette unite: $ax' + by' + c = 0$ si trasforma in $a(x-y) + b(2y) + c = 0$

$ax + (2b - a)y + c = 0$, che coincide con la prima retta se

$$\frac{a}{a} = \frac{2b-a}{b} = \frac{c}{c} \Rightarrow 2b - a = b \Rightarrow \boxed{a = b}$$

Sono quindi unite tutte le rette del tipo $ax + ay + c = 0$

cioè del tipo $\boxed{x + y + k = 0}$

(oltre alla già trovata $y = 0$, che è anche luogo di punti uniti).

e) Le rette tangenti sono quelle che distano "$\sqrt{2} - 1$" dal punto $(\sqrt{2} - 1; 1)$, centro della γ:

$$\frac{|\sqrt{2} + k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow |\sqrt{2} + k| = 2 - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} + k = \pm(2 - \sqrt{2}) \quad \begin{cases} k = -2\sqrt{2} + 2 \\ k = 2 \end{cases}$$

(La retta $y = 0$ è esterna).

Le rette "esterne" a γ sono quelle per cui

$$\frac{|\sqrt{2} + k|}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} - 1 \Rightarrow |\sqrt{2} + k| > 2 - \sqrt{2}$$

1) $\sqrt{2} + k > 2 - \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{k > 2 - 2\sqrt{2}}$

2) $\sqrt{2} + k < -2 + \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{k < -2}$