LICEO SCIENTIFICO PNI SUPPLETIVA 2000 - PROBLEMA 1

È assegnata la curva γ di equazione: $y = e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ dove a è una costante positiva.
Il candidato:

a) *studi e disegni il grafico di γ;*

b) *verifichi in particolare che essa ammette due punti di flesso F_1 e F_2 di ascisse rispettive $x_1 = -a\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x_2 = a\frac{\sqrt{2}}{2}$;*

c) fornisca col metodo dei trapezi una stima dell'area della regione del piano delimitata dal grafico di γ sull'intervallo di estremi x_1 e x_2 e dal segmento F_1F_2;

d) dica se il risultato ottenuto rappresenti una stima per difetto o per eccesso del risultato esatto;

e) illustri la relazione che intercorre tra γ e la curva normale di Gauss utilizzata nella statistica.

a)

Studiamo la funzione di equazione: $y = e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ $(con\ a\ costante\ postiva)$ e rappresentiamola graficamente.

$$\boldsymbol{y = e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = f(x)}$$

DOMINIO: Tutto R. La funzione è pari, essendo $f(-x) = f(x)$

EVENTUALI SIMMETRIE NOTEVOLI (pari/dispari):

La funzione è pari, essendo $f(-x) = f(x)$, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y.

SEGNO: La funzione è sempre positiva (grafico tutto al di sopra dell'asse x).

EVENTUALI INTERSEZIONI CON GLI ASSI CARTESIANI: non ci sono intersezioni con l'asse x (la funzione è sempre positiva. Se x=0, y=1: il grafico passa per il punto (0; 1).

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$\lim_{x\to\pm\infty} \boldsymbol{e}^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = 0^+ :$ $l'asse delle\ x$ è $asintoto\ orizzontale\ per\ \ x \to \pm\infty.$

Non ci sono asintoti obliqui.

STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA:

f(x)=$e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = e^{-\frac{1}{a^2}x^2}$; $f'(x) = -\frac{2x}{a^2}e^{-\frac{1}{a^2}x^2}$: definita in tutto il dominio.

Risulta: $f'(x) > 0\ per\ x < 0,\ f'(x) = 0\ se\ x = 0,\ f'(x) < 0\ \ se\ x > 0.$ Quindi il grafico è crescente per x<0, decrescente per x>0 ed ha un massimo relativo (e assoluto) per x=0, di orinata uguale ad 1: M=(0; 1).

STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA:

$$f'(x) = -\frac{2x}{a^2}e^{-\frac{1}{a^2}x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{a^2}\left[e^{-\frac{1}{a^2}x^2} + x\left(-\frac{2x}{a^2}e^{-\frac{1}{a^2}x^2}\right)\right] = -\frac{2e^{-\frac{1}{a^2}x^2}}{a^2}\left(1 - \frac{2x^2}{a^2}\right) =$$

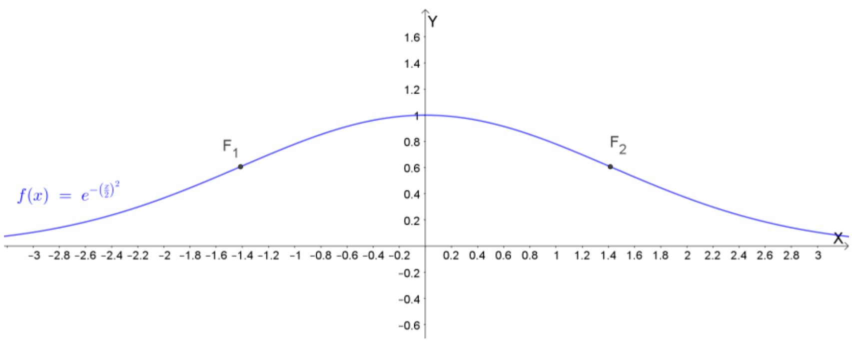
$$= -\frac{2}{a^4}e^{-\frac{1}{a^2}x^2}(a^2 - 2x^2) = f''(x)$$

Risulta $f''(x) > 0\ se\ \ a^2 - 2x^2 < 0\ ,\ x^2 > \frac{a^2}{2}:\ \ x < -a\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ \ vel\ \ x > a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$f''(x) = 0\ \ se\ \ x \pm a\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \ f''(x) < 0\ \ se\ \ \ \ -a\frac{\sqrt{2}}{2} < x < a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pertanto il grafico della funzione volge la concavità verso l'alto se $x < -a\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ \ vel\ \ x > a\frac{\sqrt{2}}{2}$ e verso il basso se $-a\frac{\sqrt{2}}{2} < x < a\frac{\sqrt{2}}{2}$. In particolare esso ammette due punti di flesso F_1 e F_2 di ascisse rispettive $x_1 = -a\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ e\ \ x_2 = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ con ugual ordinata data da $f\left(\pm a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Perciò: $F_1 = \left(-a\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right),\ \ F_2 = \left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

GRAFICO DELLA FUNZIONE (per comodità poniamo a=2).



b)

Verifichiamo che la curva ammette due punti di flesso F_1 e F_2 di ascisse rispettive

$$x_1 = -a\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ e\ \ x_2 = a\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

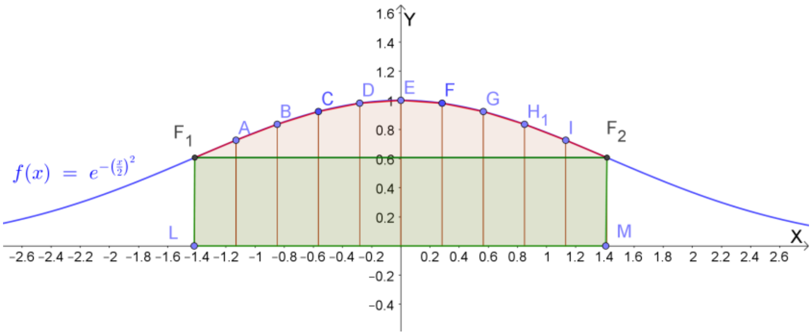
Già verificato nel punto precedente.

c)

Calcoliamo col metodo dei trapezi una stima dell'area della regione del piano delimitata dal grafico di γ sull'intervallo di estremi x_1 e x_2 e dal segmento F_1F_2.

L'area richiesta è uguale alla differenza fra l'area del trapezoide delimitato dal grafico della curva e l'asse delle x nell'intervallo $\left[-a\frac{\sqrt{2}}{2}, a\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e l'area del rettangolo LMF_2F_1 . Calcoliamo l'area del trapezoide.

Dividiamo l'intervallo $\left[-a\frac{\sqrt{2}}{2}, a\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ in n=10 parti uguali, di lunghezza $h = \frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{10} = \frac{a\sqrt{2}}{10}$ ed indichiamo con $x_0, x_1, \ldots, x_{10}$ gli estremi dei 10 segmenti. Nel grafico per comodità abbiamo posto a=2.



Il metodo dei trapezi permette di approssimare l'area di un trapezoide con la somma di un certo numero di trapezi rettangoli, che hanno per altezza h e basi $f(x_i)$ *ed* $f(x_{i+1})$. Tale formula generale è data da:

$$Area \cong h\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\cdots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2})\right) \cong$$

$$= h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\right) \cong \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$$

Nel caso in esame n=10.

Per la simmetria della figura, possiamo limitarci a calcolare la somma delle aree dei trapezi da $\mathbf{0}$ *ad* $\boldsymbol{a}\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$ e moltiplicare poi il valore ottenuto per 2. Gli estremi dei 5 segmenti sono:

$0, 0+h, 0+2h, 0+3h, 0+4h, 0+5h \quad ossia:$

$$0, h, 2h, 3h, 4h, 5h \quad \Rightarrow \quad 0, \frac{a\sqrt{2}}{10}, \frac{2a\sqrt{2}}{10}, \frac{3a\sqrt{2}}{10}, \frac{4a\sqrt{2}}{10}, \frac{5a\sqrt{2}}{10} \quad \Rightarrow \quad 0, \frac{a\sqrt{2}}{10}, \frac{a\sqrt{2}}{5}, \frac{3a\sqrt{2}}{10}, \frac{2a\sqrt{2}}{5}, \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{Area}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{10}\left(\frac{f(0)+f\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)}{2}+f\left(0+a\frac{\sqrt{2}}{10}\right)+f\left(a\frac{\sqrt{2}}{5}\right)+f\left(3a\frac{\sqrt{2}}{10}\right)+f\left(2a\frac{\sqrt{2}}{5}\right)\right) =$$

$= \frac{a\sqrt{2}}{10}\left(\frac{1+e^{-\frac{1}{2}}}{2}+e^{-\frac{1}{50}}+e^{-\frac{2}{25}}+e^{-\frac{9}{50}}+e^{-\frac{8}{25}}\right) \cong a(0.6036) \cong 0.6036\, a$. Quindi:

$Area(trapezoide) = 2\,(0.6036\, a) = 1.2072\, a$.

Area (rettangolo LMF_2F_1) $= LM \cdot MF_2 = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = a \cdot \sqrt{\frac{2}{e}} \cong 0.8578\ a$

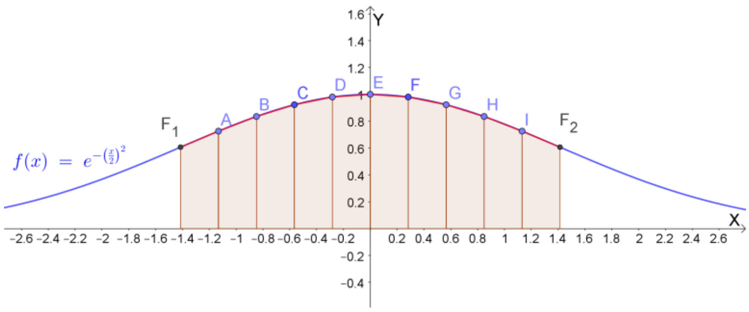
Ed infine l'area richiesta è:

$Area(trapezoide) - Area(rettangolo) \cong (1.2072\ - 0.8578)a \cong 0.35\ a$

d)

Stabiliamo se il risultato ottenuto rappresenta una stima per difetto o per eccesso del risultato esatto.

Il risultato rappresenta una stima PER DIFETTO del risultato esatto. Osservando infatti la figura che segue, essendo il grafico della curva con la concavità sempre verso il basso nell'intervallo considerato, i segmenti che rappresentano i lati obliqui dei trapezi sono sempre al di sotto dell'arco di curva corrispondente, quindi ogni trapezio ha area inferiore a quella del corrispondente trapezoide.



e)

Illustriamo la relazione che intercorre tra γ e la curva normale di Gauss utilizzata nella statistica.

Ricordiamo che la distribuzione normale (o di Gauss) ha la seguente funzione densità di probabilità:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, dove σ e μ sono due parametri assegnati, con $\sigma > 0$.

Questa funzione, ponendo $\mu = 0$, può essere scritta nella forma: $f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2}\,\sigma)\sqrt{\pi}}\, e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$.

Ponendo $\sqrt{2}\sigma = a$, si ottiene $f(x) = \left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\right) e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$.

La curva γ di equazione $y = e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ pertanto, a meno della costante moltiplicativa $\left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\right)$, può essere vista come la funzione densità di probabilità di una distribuzione di Gauss.

Con la collaborazione di Angela Santamaria