LICEO SCIENTIFICO PNI SUPPLETIVA 2000 - PROBLEMA 2

Il triangolo ABC, rettangolo e non isoscele, è la base di una piramide di altezza $3a\sqrt[3]{2}$.
Le misure dei suoi cateti sono date da due delle tre radici dell'equazione:

$$4x^3 - 11ax^2 + 10a^2x - 3a^3 = 0$$

Il candidato:

a) *determini la distanza k di un piano α dal vertice della piramide sapendo che α è parallelo al piano del triangolo ABC e taglia la piramide in due parti equivalenti;*

b) *determini k nel caso in cui il triangolo ABC ha un cateto che misura a e l'altro cateto è una soluzione, approssimata con due cifre significative, dell'equazione:*
$$x^3 + 4xa^2 - 2a^3 = 0$$

c) *esponga il procedimento utilizzato per il calcolo approssimato della radice dell'equazione proposta.*

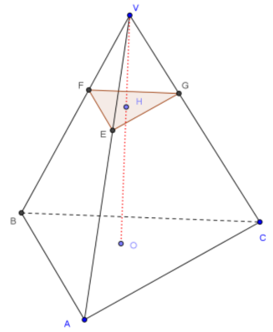
a)

Il triangolo ABC, rettangolo e non isoscele, è la base di una piramide di altezza $3a\sqrt[3]{2}$.
Le misure dei suoi cateti sono date da due delle tre radici dell'equazione:

$$4x^3 - 11ax^2 + 10a^2x - 3a^3 = 0$$

Determiniamo la distanza k di un piano α dal vertice della piramide sapendo che α è parallelo al piano del triangolo ABC e taglia la piramide in due parti equivalenti.

Consideriamo il triangolo ABC rettangolo in A e non isoscele (quindi AB diverso da AC) e sia EFG il piano α parallelo al piano di ABC con distanza $k = VH$ dal vertice V della piramide. Sappiamo che l'altezza della piramide è $VO = 3a\sqrt[3]{2}$.



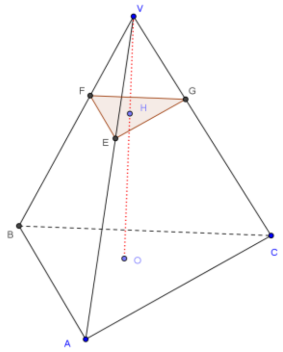
Osserviamo esplicitamente che per determinare k non serve conoscere la misura dei due cateti (come vedremo in seguito); nonostante ciò vediamo come trovare la misura dei cateti.

Cerchiamo le radici dell'equazione $4x^3 - 11ax^2 + 10a^2x - 3a^3 = 0$.
Osserviamo che una radice dell'equazione è $x = a$, essendo $4a^3 - 11a^3 + 10a^3 - 3a^3 = 0$.

Abbassando di grado l'equazione mediante la regola di Ruffini otteniamo:
$(x-a)^2(4x-3a)=0$, che ha come radici $x=a$ $(doppia)$ e $x=\frac{3}{4}a$.

Le radici (distinte) dell'equazione che rappresentano le misure dei cateti del triangolo ABC rettangolo in A sono quindi $AB=\frac{3}{4}a$ e $AC=a$.

Dobbiamo ora determinare $k=VH$ in modo tale che il volume della piramide sia uguale a quello del tronco di piramide ABCEFG. Poniamo per comodità $h=VO$.



Per una nota proprietà delle piramidi simili sappiamo che:

$$\frac{Area(ABC)}{Area(EFG)}=\frac{VO^2}{VH^2}=\frac{h^2}{k^2},\quad Area(EFG)=\frac{Area(ABC)k^2}{h^2}$$
$$V(piramide\ ABCV)=\frac{1}{3}\ Area(ABC)\ VO$$
$$V(piramide\ EFGV)=\frac{1}{3}\ Area(EFG)\ VH$$
$$V(tronco\ di\ piramide\ ABCEFGV)=V(piramide\ ABCV)-V(piramide\ EFGV)$$

Dovendo essere:
$V(piramide\ EFGV)=V(tronco\ di\ piramide\ ABCEFGV)$ abbiamo:

$V(piramide\ EFGV)=\ V(piramide\ ABCV)-V(piramide\ EFGV)$ quindi:
$$V(piramide\ EFGV)=\frac{1}{2}\ V(piramide\ ABCV)$$
$$\frac{1}{3}Area(EFG)\ k=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}Area(ABC)\ h\right];\quad Area(EFG)\ k=\frac{1}{2}Area(ABC)h;\quad \frac{Area(EFG)}{Area(ABC)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{k}$$
$$Area(EFG)=\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{k}\ \big(Area(ABC)\big)$$
Ma abbiamo visto che $Area(EFG)=\frac{Area(ABC)k^2}{h^2}$, pertanto:

$$\frac{Area(ABC)k^2}{h^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{k}\ \big(Area(ABC)\big),\qquad \frac{k^2}{h^2}=\frac{1}{2}\ \frac{h}{k},\qquad k^3=\frac{h^3}{2}:\ k=\frac{h}{\sqrt[3]{2}}=\frac{3a\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=3a$$
Quindi: $k=3a$.

b)

Determiniamo k nel caso in cui il triangolo ABC abbia un cateto che misura **a** *e l'altro cateto sia una soluzione, approssimata con due cifre significative, dell'equazione:*

$$x^3 + 4xa^2 - 2a^3 = 0$$

Come visto nel punto precedente, risulta: $k^3 = \frac{h^3}{2}$, quindi:

il valore di k non dipende dalla misura del secondo cateto del triangolo ABC, pertanto anche in questo caso risulta: $k = 3a$

Cerchiamo comunque il valore del cateto come richiesto.

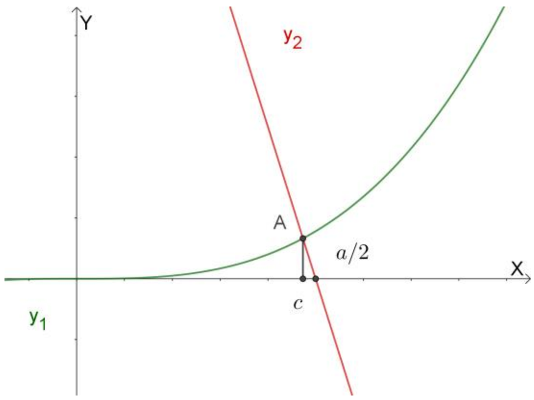
Isoliamo la radice che fornisce il valore approssimato del secondo cateto del triangolo ABC.

L'equazione equivale a $x^3 = -4a^2x + 2a^3$.

Rappresentiamo graficamente le funzioni di equazioni: $y_1 = x^3$ e $y_2 = -4a^2x + 2a^3$.

La prima è una cubica, la seconda è una retta che interseca l'asse y in y=$2a^3$ e l'asse x in $x = \frac{a}{2}$.

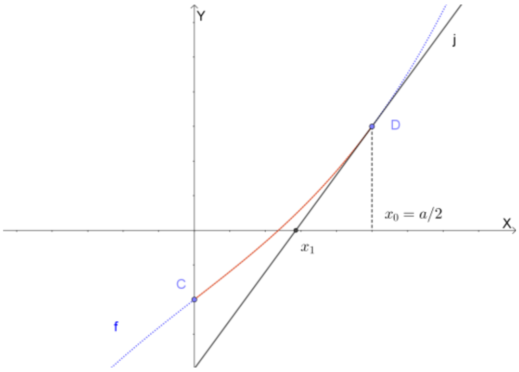
Rappresentiamo le due curve nello stesso sistema di riferimento:



Si verifica facilmente che le due curve si incontrano in un solo punto A, con ascissa tra 0 e a/2.

Usiamo il **metodo delle tangenti di Newton** per determinare l'ascissa di A con due cifre significative.

Risolvere l'equazione $x^3 = -4a^2x + 2a^3$ equivale a trovare gli zeri della funzione $f(x) = x^3 + 4xa^2 - 2a^3$; questa funzione soddisfa le ipotesi del metodo delle tangenti nell'intervallo [0;a/2]; $f(0) = -2a^3 < 0$, $f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^3}{8} > 0$, $f'(x) = 3x^2 + 4a^2 > 0$ per ogni x, $f''(x) = 6x \geq 0$ nel nostro intervallo:
la derivata seconda ha lo stesso segno di $f\left(\frac{a}{2}\right)$, quindi si assume $x = \frac{a}{2}$ come punto iniziale dell'iterazione utilizzata nella formula del metodo delle tangenti.



La formula iterativa è la seguente (si noti che si converge verso la soluzione per valori decrescenti):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \; ; \; f'(x) = 3x^2 + 4a^2, \; x_0 = \frac{a}{2} \; , \; f(x) = x^3 + 4xa^2 - 2a^3.$$

Per comodità di calcolo la formula può essere espressa nel modo seguente:

$$x \coloneqq x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 + 4xa^2 - 2a^3}{3x^2 + 4a^2} = \frac{2(a^3 + x^3)}{4a^2 + 3x^2} = g(x)$$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{9}{19}a \cong 0.4737\, a$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{2168a}{4579} \cong 0.4735\, a$$

Il valore approssimato della radice con due cifre decimali è quindi $0.47\, a$.

Determiniamo k nel caso in cui il triangolo ABC abbia un cateto che misura **a** *e l'altro cateto* $\boldsymbol{0.47\, a}$.

Come visto nel punto precedente, risulta: $k^3 = \frac{h^3}{2}$, quindi:

il valore di k non dipende dalla misura del secondo cateto del triangolo ABC, pertanto anche in questo caso risulta: $k = 3a$

c)

Esponiamo il procedimento utilizzato per il calcolo approssimato della radice dell'equazione proposta.

Il procedimento utilizzato (**metodo della tangente o di Newton**) è stato descritto nel punto precedente.

Con la collaborazione di Angela Santamaria