LICEO SCIENTIFICO PNI SUPPLETIVA 2000 - PROBLEMA 3

Si consideri l'esperimento consistente nell'estrazione a caso di 5 palline, una dopo l'altra, senza reimbussolamento delle palline estratte, da un sacchetto contenente 90 palline numerate da 1 a 90, aventi tutte le stesse possibilità di uscita (gioco del Lotto).

a. Dire se è più probabile che, prescindendo dall'ordine di uscita, esca:
   - la cinquina di numeri "successivi" {1,2,3,4,5} o la cinquina di numeri "non successivi" {2,3,5,8,13};
   - una qualunque cinquina di numeri "successivi" o una qualunque cinquina di numeri "non successivi".

b. Prese in esame le due seguenti proposizioni:
   - A: «La probabilità che il 2° numero estratto sarà il "90" è 1/89»,
   - B: «La probabilità che nei 5 numeri estratti ci sarà il "90" è 5/90», stabilire quali delle seguenti implicazioni sono vere e quali no e fornire esaurienti spiegazioni:

   (1) $A \to B$, (2) $B \to A$, (3) $\overline{A} \to \overline{B}$, (4) $\overline{B} \to \overline{A}$.

c. Supposto di puntare una determinata somma sull'uscita dei tre numeri 14, 8, 42, sulla "Ruota" di Napoli, calcolare la probabilità di vincita (fare un terno al Lotto). Se il gioco fosse equo e la puntata fosse di 5 Euro, quanto dovrebbe pagare lo Stato in caso di vincita del giocatore?

d. Supponendo di ripetere n volte l'esperimento considerato, calcolare la probabilità che il "90" esca, tra i 5 numeri estratti:
   - al più 5 volte;
   - per la prima volta proprio alla n-esima estrazione. Qual è il più piccolo valore di n per cui questa probabilità non supera 10^{-10}?

a)

Si consideri l'esperimento consistente nell'estrazione a caso di 5 palline, una dopo l'altra, senza reimbussolamento delle palline estratte, da un sacchetto contenente 90 palline numerate da 1 a 90, aventi tutte le stesse possibilità di uscita (gioco del Lotto).

Dire se è più probabile che, prescindendo dall'ordine di uscita, esca:

1) *la cinquina di numeri "successivi" {1,2,3,4,5} o la cinquina di numeri "non successivi" {2,3,5,8,13};*
2) *una qualunque cinquina di numeri "successivi" o una qualunque cinquina di numeri "non successivi".*

a1)

La probabilità è la stessa, poiché la probabilità di estrarre nell'ordine una qualsiasi cinquina è la stessa ed è pari a:

$$p = \frac{1}{90}\cdot\frac{1}{89}\cdot\frac{1}{88}\cdot\frac{1}{87}\cdot\frac{1}{86}$$

a2)

E’ più probabile che esca una cinquina di numeri non successivi.

Infatti i casi favorevoli all’uscita di cinque numeri successivi (che sono le cinquine che hanno come primo estratto 1,2,3,…,86) sono 86: $(1,2,3,4,5), (2,3,4,5,6), \dots, (86,87,88,89,90)$.

Le cinquine fatte da numeri non successivi sono in numero maggiore. Per esempio se il primo estratto è 1, il secondo estratto può essere un qualsiasi numero da 3 a 90, mentre nel caso precedente il secondo estratto poteva essere solo il 2.

b)

Prese in esame le due seguenti proposizioni:

A: «La probabilità che il 2° numero estratto sarà il “90” è 1/89»,

B: «La probabilità che nei 5 numeri estratti ci sarà il “90” è 5/90»,

stabilire quali delle seguenti implicazioni sono vere e quali no e fornire esaurienti spiegazioni:

$$(1)\ A \to B,\ (2)\ B \to A,\ \ (3)\ \bar{A} \to \bar{B},\ (4)\ \bar{B} \to \bar{A}$$

A) La probabilità p(A) che il secondo numero estratto sia il 90 coincide con la probabilità che il primo estratto NON sia 90 ed il SECONDO estratto sia il 90, quindi: $p(A) = \frac{89}{90} \cdot \frac{1}{89} = \frac{1}{90}$.
Pertanto la proposizione A è FALSA.

Osserviamo che la proposizione B) è VERA, in quanto la probabilità che nei 5 numeri estratti ci sia il 90 si calcola nel seguente modo. I casi favorevoli (cioè le cinquine con il 90) corrispondono alle quaterne non ordinate che si possono fare con 89 oggetti (i numeri da 1 a 89) a 4 a 4, cioè le combinazioni semplici di 89 oggetti a 4 a 4: $C_{89,4} = \binom{89}{4}$. I casi possibili corrispondono alle cinquine che si possono fare con 90 oggetti (i numeri da 1 a 90) a 5 a 5, cioè le combinazioni semplici di 90 oggetti a 5 a 5: $C_{90,5} = \binom{90}{5}$. Perciò:

$$p(B) = \frac{C_{89,4}}{C_{90,5}} = \frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{4!}}{\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5!}} = \frac{5}{90}.$$

Quindi A falsa e $\bar{A}$ vera; B vera, $\bar{B}$ falsa.

1) Ricordiamo che un’implicazione del tipo $p \to q$ è FALSA solo se p è vera e q è falsa.
Nel nostro caso la proposizione A è falsa, quindi l’implicazione $A \to B$ è vera (a prescindere dal valore di verità di B).

2) $B \to A$ è FALSA (essendo B vera ed A falsa).
3) $\bar{A} \to \bar{B}$ è FALSA (essendo $\bar{A}$ vera ed $\bar{B}$ falsa).
4) $\bar{B} \to \bar{A}$ è VERA (essendo $\bar{B}$ falsa ed $\bar{A}$ vera).

c)

Supposto di puntare una determinata somma sull'uscita dei tre numeri 14, 8, 42, sulla "Ruota" di Napoli, calcolare la probabilità di vincita (fare un terno al Lotto). Se il gioco fosse equo e la puntata fosse di 5 Euro, quanto dovrebbe pagare lo Stato in caso di vincita del giocatore?

La probabilità di fare un terno al Lotto si calcola nel modo seguente.
Le cinquine favorevoli sono quelle che contengono, in ordine qualsiasi, i tre numeri giocati, che equivalgono alle cinquine con 2 degli 87 numeri non giocati, cioè le combinazioni di 87 oggetti a 2 a 2: $C_{87,2} = \binom{87}{2}$.
I casi possibili corrispondono alle cinquine che si possono fare con 90 oggetti (i numeri da 1 a 90) a 5 a 5, cioè le combinazioni semplici di 90 oggetti a 5 a 5: $C_{90,5} = \binom{90}{5}$. Perciò:

$$p(terno) = \frac{n.\,casi\ favorevoli}{n.\,casi\ possibili} = \frac{C_{87,2}}{C_{90,5}} = \frac{3741}{43949268} \cong 0.000085 \cong 0.0085\ \% = p(terno).$$

Ricordiamo che la probabilità in esame può essere vista come: $p = \frac{puntata}{incasso}$, $quindi$: $incasso = \frac{puntata}{p}$
Nel nostro caso: $incasso = \frac{5}{0.000085} \cong 58823.53$ € .

Se il gioco fosse equo lo Stato dovrebbe quindi pagare circa 58823.53 € *in caso di vincita.*

In effetti nel gioco del Lotto lo Stato paga 4500 volte la puntata (sia che si punti su una data ruota, per esempio Napoli, che su una ruota nazionale). Quindi puntando 5 euro si incassa: 5x4500=22500 euro.
Il gioco del Lotto non è equo!

d)

Supponendo di ripetere n volte l'esperimento considerato, calcolare la probabilità che il "90" esca, tra i 5 numeri estratti:

1) *al più 5 volte;*
2) *per la prima volta proprio alla n-esima estrazione. Qual è il più piccolo valore di n per cui questa probabilità non supera 10^{-10}?*

Calcoliamo la probabilità che il 90 esca "al più" 5 volte su n prove (n estrazioni di cinque numeri senza reimbussolamento).

La probabilità che NON ESCA IL 90 in 5 estrazioni (n=1) senza reimbussolamento è data da:

$$p = \frac{89}{90} \cdot \frac{88}{89} \cdot \frac{87}{88} \cdot \frac{86}{87} \cdot \frac{85}{86} = \frac{85}{90}$$

Quindi la probabilità che ESCA IL 90 in 5 estrazioni (probabilità di 1 successo) è $1 - \frac{85}{90} = \frac{5}{90}$.
La probabilità di avere "al più 5 successi in n prove" è data da:

$$p(n,0) + p(n,1) + p(n,2) + p(n,3) + p(n,4) + p(n,5).$$

Si tratta di una distribuzione binomiale (o di Bernoulli), con $p = \frac{5}{90}$ $e\ q = 1 - p = \frac{85}{90}$:

$$\binom{n}{0} p^0 q^5 + \binom{n}{1} p^1 q^4 + \cdots + \binom{n}{5} p^5 q^0 = \sum_{k=0}^{5} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{5} \binom{n}{k} \left(\frac{5}{90}\right)^k \left(\frac{85}{90}\right)^{n-k}$$

La probabilità richiesta è quindi: $\sum_{k=0}^{5} \binom{n}{k} \left(\frac{5}{90}\right)^k \left(\frac{85}{90}\right)^{n-k}$.

Calcoliamo ora la probabilità che, ripetendo n volte l'esperimento considerato, il "90" esca, tra i 5 numeri estratti per la prima volta proprio alla n-esima estrazione.

Dobbiamo avere nelle prime "n-1" prove l'insuccesso: $\left(\frac{85}{90}\right)^{n-1}$ e all'n-ma prova il successo: $\frac{5}{90}$.

La probabilità richiesta è quindi: $\left(\frac{85}{90}\right)^{n-1} \cdot \frac{5}{90}$

Calcoliamo ora il più piccolo valore di n per cui questa probabilità non supera 10^{-10}.

Deve essere: $\left(\frac{85}{90}\right)^{n-1} \cdot \frac{5}{90} \le 10^{-10}$, $\left(\frac{85}{90}\right)^{n-1} \le 10^{-10} \cdot \frac{90}{5}$, $ln\left(\left(\frac{85}{90}\right)^{n-1}\right) \le ln\left(10^{-10} \cdot \frac{90}{5}\right)$;

$$(n-1)\ln\left(\frac{85}{90}\right) \le ln\left(10^{-10} \cdot \frac{90}{5}\right); \quad n - 1 \ge \frac{ln\left(10^{-10} \cdot \frac{90}{5}\right)}{\ln\left(\frac{85}{90}\right)} \cong 352.27; \quad n \ge 1 + 352.2;$$

$n \ge 353.27$; essendo n intero positivo, *il più piccolo valore di n per cui la probabilità richiesta non supera 10^{-10}* è 354.

Con la collaborazione di Angela Santamaria