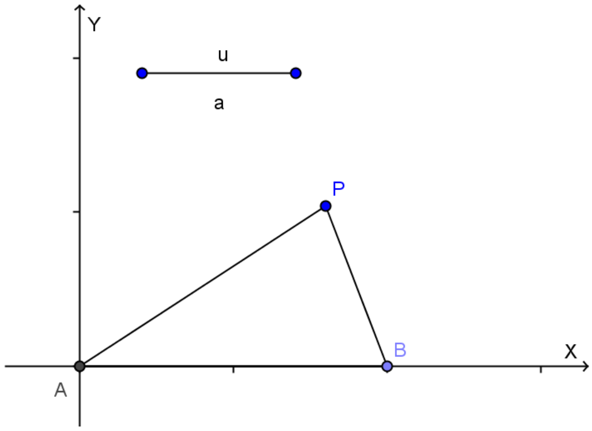
PNI 2001 - PROBLEMA 1

Sia AB un segmento di lunghezza 2a e C il suo punto medio.
Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y):

(a)

Si verifichi che il luogo dei punti P tali che $\frac{PA}{PB} = k$ *(k costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di k per cui la soluzione degenera in una retta.*



Posto a=1, abbiamo A=(0; 0), B=(2;0), P=(x; y)

Da $\frac{PA}{PB} = k$, con k>0, otteniamo $PA^2 = k^2 \cdot PB^2$, da cui l'equazione del luogo:

$$(k^2 - 1)(x^2 + y^2) - 4k^2x + 4k^2 = 0$$

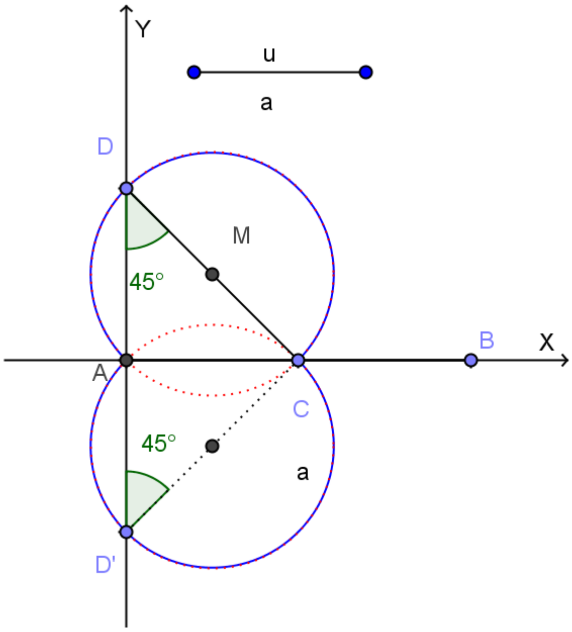
Che è una circonferenza che degenera in una retta (x=1, l'asse di AB) quando k=1.

(b)

Si determini il luogo geometrico γ *dei punti X che vedono AC sotto un angolo di 45°.*

Facendo riferimento a quanto posto nel punto (a), abbiamo: C=(1;0).

I punti D=(0; 1) e D'=(0; -1) vedono AC sotto un angolo di 45°. Il luogo richiesto è formato dai due archi di circonferenza ADC e AD'C.



La circonferenza per A,C e D (di centro M=(1/2;-1/2) e passante per O) ha equazione:

$x^2 + y^2 - x - y = 0$

La circonferenza per A,C e D' (di centro M=(1/2;1/2) e passante per O) ha equazione:

$x^2 + y^2 - x + y = 0$

Il luogo γ richiesto (formato dai due archi di circonferenza ADC e AD'C) ha quindi equazione:

$$x^2 + y^2 - x - |y| = 0$$

(c)

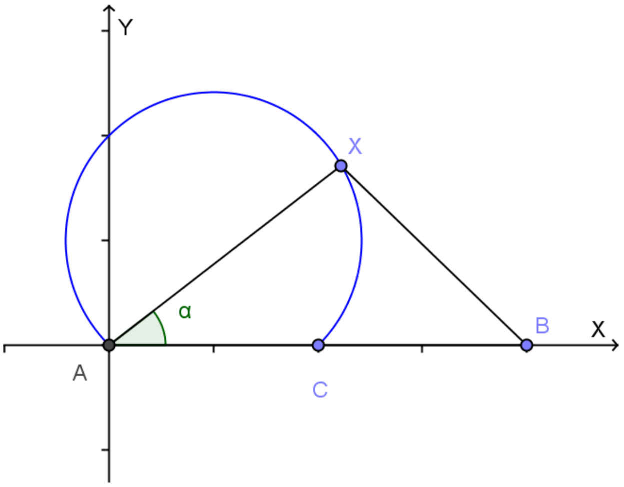
Posto X, appartenente a γ, in uno dei due semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l'angolo $X\hat{A}C$ si illustri l'andamento della funzione y = f(x) con $f(x) = \left(\frac{XB}{XA}\right)^2$ e x = tgα.

X si ottiene intersecando la retta di equazione y=mx con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - x - y = 0$

(con $m \geq 0$ ed $m < -1$ $essendo$ $m = tg\ \alpha$ e $0 \leq \alpha < 135°$).

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = mx \\ x^2 + y^2 - x - y = 0 \end{cases}$$ si ottiene $X = \left(\frac{1+m}{1+m^2}; \frac{m(1+m)}{1+m^2}\right)$



Ponendo $m = tg\,\alpha = x$ e calcolando XB^2 e XA^2 (dove B=(2;0)), si ottiene la funzione;

$$y = f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}, \quad con\ x \geq 0\ vel\ x < -1$$

Studiamo la funzione:

$$y = f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$$

- Dominio: $-\infty < x < -1;\ \ 0 \leq x < +\infty$
- Intersezioni con gli assi cartesiani:
  x=0, y=1
  y=0, $5x^2 - 2x + 1 = 0$: non esiste x.
- La funzione non né pari né dispari.
- Segno della funzione: y>0 per ogni x del dominio
- Limiti:
  $$\lim_{x \to (-1)^-} \frac{5x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} = +\infty \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} = 5$$
  (quindi x)-1 e y=5 sono asintoti)
- Derivata prima: $f'(x) = \frac{4(3x-1)}{(x+1)^3} = 0\ per\ x = \frac{1}{3} \qquad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$
  f'(x)>0 per x>1/3 (crescente); minimo relativo in (1/3;1/2).
  f'(0)= -4
- Derivata seconda:
  $f''(x) = \frac{24(1-x)}{(x+1)^4} \geq 0 \quad per\ x \leq 1: concava\ verso\ l'alto$
  Flesso in (1; 1).
- Grafico:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}, \quad con\ x \geq 0\ vel\ x < -1$$