

PNI 2001 - PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x,y) , è assegnata la funzione:

$$y = x^2 + a \log(x + b)$$

con a e b diversi da zero.

(a)

Si trovino i valori di a e b tali che la curva Γ grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in $x=1$.

$$y(0) = 0 \Rightarrow a \log b = 0 \Rightarrow b = 1 \quad (a = 0 \text{ non accett.})$$

$$y' = 2x + \frac{a}{x+1}; \quad y'(1) = 0 \Rightarrow a = -4$$

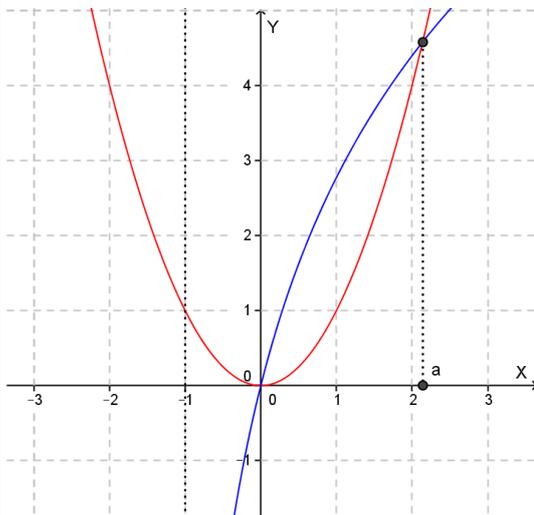
Quindi la funzione richiesta ha equazione: $y = x^2 - 4 \log(x + 1)$

(b)

Si studi e si disegni Γ (N.B. $\log = \logaritmo\ naturale = \ln$)

$$y = x^2 - 4 \log(x + 1)$$

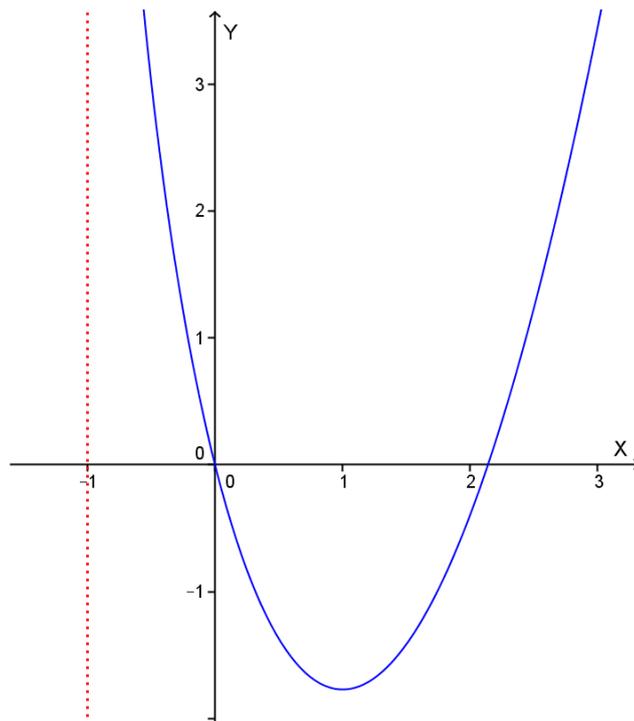
- Dominio: $x > -1$
- Intersezioni con gli assi:
 $x=0, y=0$;
 $y=0; x^2 - 4 \log(x + 1) = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \log(x + 1)$
 Confronto grafico:



Si trova una soluzione $x=a$,
 $2 < a < 3$
 $(4 < 4 \log 3, \quad 9 > 4 \log 4)$

- Segno della funzione: $y > 0$ se $x^2 > 4 \log(x + 1)$, per: $-1 < x < 0$, $x > a$
- Limiti alla frontiera del dominio:
 $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$
 Quindi $x = -1$ è asintoto verticale. Non c'è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$, poiché la funzione è infinito di ordine 2.
- Studio della derivata prima: $y' = 2x - \frac{4}{x+1} = \frac{2x^2+2x-4}{x+1} > 0$
 per $x < -2$, $x > 1$: quindi la funzione è crescente per $x > 1$ e decrescente per $-1 < x < 1$;
 minimo per $x = 1$; $y(1) = 1 - 4 \log 2 \cong -1.8$
- Studio derivata seconda: $y'' = 2 + \frac{4}{(x+1)^2} > 0$ per ogni x
 Quindi il grafico volge sempre la concavità verso l'alto.
- Grafico della funzione

$$y = x^2 - 4 \log(x + 1)$$



(c)

Si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di Γ con l'asse x .

Utilizziamo il metodo delle tangenti per trovare la radice positiva dell'equazione di equazione $x^2 - 4 \log(x + 1) = 0$ in $[2;3]$.

Posto $f(x) = x^2 - 4 \log(x + 1)$, notiamo che è continua e derivabile nell'intervallo $[2;3]$.

Risulta $f(2) = 4 - 4 \log(3) < 0$; $f''(x) = 2 + \frac{4}{(x+1)^2} > 0$ in $[2;3]$; essendo:
$$f(2) \cdot f''(x) < 0$$

Dobbiamo assumere come punto iniziale dell'iterazione $x_0 = 3$.

Applichiamo la formula iterativa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2.30903$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.14917$$

$$x_3 = 2.13913$$

(d)

Si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta $y = y(1)$.

Risulta: $y(1) = 1 - 4 \ln(2)$

Le equazioni della simmetria rispetto alla retta $y = 1 - 4 \ln(2)$ sono:

$$\begin{cases} x = X \\ y = 2(1 - 4 \ln 2) - Y \end{cases}$$

L'equazione di Γ' è:

$$Y = -X^2 + 4 \ln(X + 1) + 2 - 8 \ln(2)$$

(e)

Si disegni, per i valori di a e b trovati, il grafico di:

$$y = |x^2 + a \log(x + b)|$$

Il grafico richiesto si ottiene da Γ ribaltando rispetto all'asse x la parte negativa.

$$y = |x^2 - 4 \log(x + 1)|$$

