PNI 2002 - PROBLEMA 1

*Due numeri **x** e **y** hanno somma e quoziente uguali ad un numero reale **a** non nullo. Riferito il piano ad un sistema S di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x,y).*

1)

Si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di a.

In base alle condizioni poste su a, sia x che y sono diversi da zero.

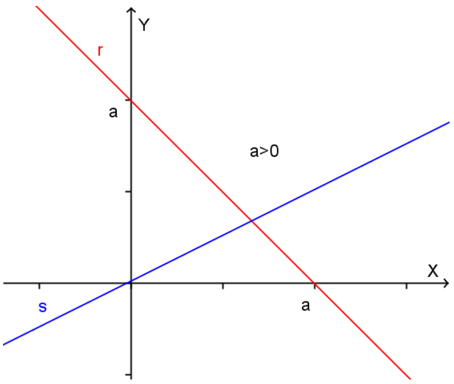
$$\begin{cases} x+y=a & (r) \\ \frac{x}{y}=a & (s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ x-ay=0 \end{cases}$$

Il sistema corrisponde all'intersezione di due rette e, per $con\ a \neq 0\ e\ a \neq 1$ ha la soluzione

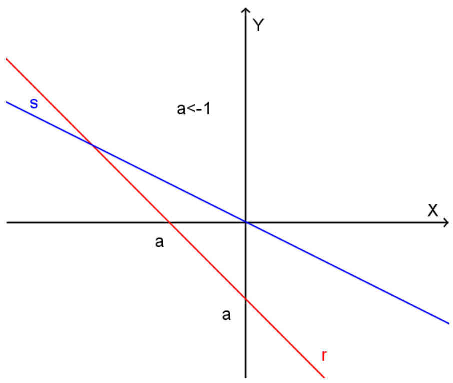
$$\begin{cases} x=\dfrac{a^2}{1+a} \\ y=\dfrac{a}{1+a} \end{cases}$$

Quindi:

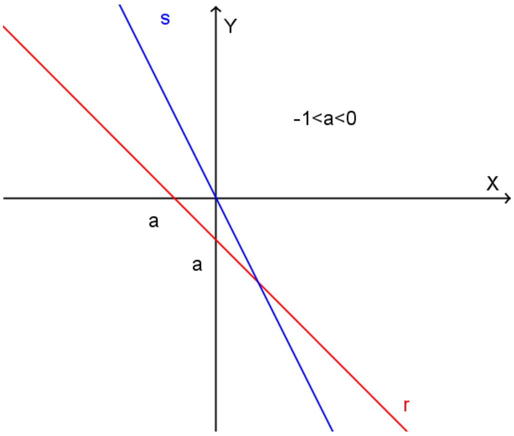
- se a>0: abbiamo una soluzione x>0 e y>0



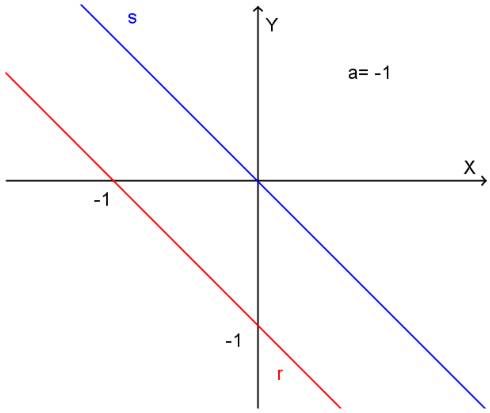
- se a<-1: abbiamo una soluzione x<0 e y>0



- se -1<a<0: abbiamo una soluzione x>0 e y<0



- se a= -1: non esiste soluzione



[ANIMAZIONE DEL LUOGO CON GEOGEBRA.]

2)

Si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti P(x;y) che soddisfano al problema.

Notiamo che: $x + y = \frac{x}{y}$ $\quad (con\ y \neq 0)$. Quindi il luogo ha equazione:
$y^2 + xy - x = 0$ $\quad (con\ y \neq 0, quindi\ privata\ dell'origine)$, che è un'iperbole.

3)

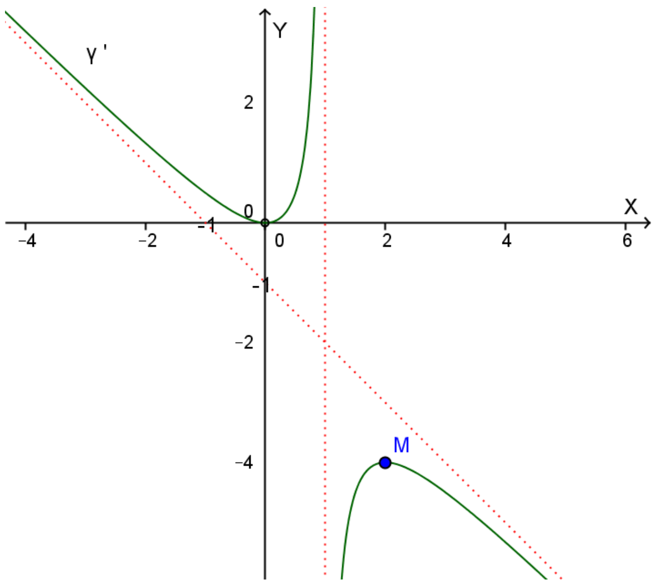
Si rappresentino in S sia la curva γ che la curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante,

$$\gamma): \quad x = \frac{y^2}{1-y} \qquad \gamma'): \quad y = \frac{x^2}{1-x}$$

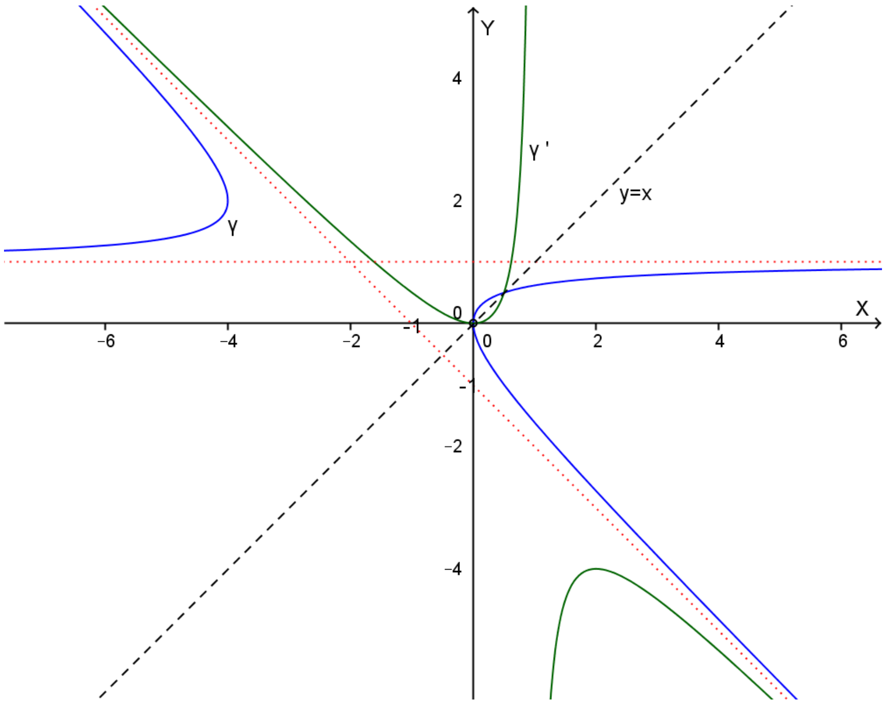
Studiamo $\gamma')$: $y = \frac{x^2}{1-x}$.

- Dominio: $x \neq 1$
- Né pari né dispari

- Intersezioni con gli assi: x=0, y=0
- Positiva per x<1
- Asintoto verticale x=1
- Asintoto obliquo: y=-x-1 ($y = \frac{x^2}{1-x}$ si può scrivere come $y = -\frac{x^2}{x-1} = -\frac{x^2-1+1}{x-1}$ $y = -\frac{x^2-1+1}{x-1} = -\frac{(x+1)(x-1)+1}{x-1} = -x-1+\frac{1}{x-1}$ e da qui segue che y= -x-1 è asintoto).
- Studio monotonia: $y' = \frac{-x^2+2\,x}{(x-1)^2} \geq 0$ se $-x^2+2\,x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq x \leq 2 \;\; x \neq 1$
  Quindi la funzione è crescente per $0 \leq x \leq 2 \;\; x \neq 1$ e decrescente per x<0 e x>2. Abbiamo quindi un massimo relativo per x= 2, con y= -4.
- Studio della concavità: $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$>0 per x<1: quindi abbiamo la concavità verso l'alto per x<1 e verso il basso per x>1.
- Il grafico di $\gamma')$: $y = \frac{x^2}{1-x}$ è il seguente:



Il grafico di $\gamma)$: $x = \frac{y^2}{1-y}$ (che si ottiene da γ' scambiando x con y) si ottiene da quello di γ' mediante una simmetria rispetto alla retta y=x.



4)

Si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ e da $\gamma\,'$ e se ne dia un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

Le due curve si intersecano sulla retta y=x nel punto di ascissa ½. L'area richiesta è il doppio dell'area della regione compresa tra $\gamma\,'$ *e la retta di equazione y=x.*

$$Area = 2\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{x^2}{1-x}\right)dx = 2\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\left(-x-1+\frac{1}{x-1}\right)\right)dx =$$

$$= 2\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx = 2\cdot\left[x^2+x+ln|x-1|\right]_o^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}-\ln 4 \cong 0.1137\ u^2$$

Calcoliamo l'integrale con il metodo dei rettangoli $\left(n=10,\ \ \frac{b-a}{n}=\frac{1}{20}\right)$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{x^2}{1-x}\right)dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2x^2-x}{x-1}\right)dx =$$
$$=\frac{1}{20}\left(f\left(\frac{1}{20}\right)+f\left(\frac{2}{20}\right)+f\left(\frac{3}{20}\right)+\cdots+f\left(\frac{10}{20}\right)\right)\cong 0.0562$$

Quindi $Area \cong 2\cdot 0.0562 \cong 0.1124\ u^2$

5)

Si calcoli y nel caso che x sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato.

Quando x= 1 si ha: $\begin{cases} 1+y=a \\ \frac{1}{y}=a \end{cases} \implies 1+y=\frac{1}{y} \implies y^2+y-1=0$ che ha come soluzioni $y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, di cui, essendo a>0, è accettabile solo la soluzione positiva:

$\boldsymbol{y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ **:** *si tratta della* ***sezione aurea*** *di un segmento di lunghezza 1*.

Tale numero, indicato con Φ, vale circa 1,6180339887…

Approfondimenti sulla sezione aurea.