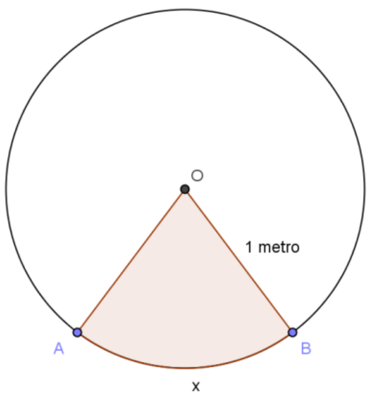
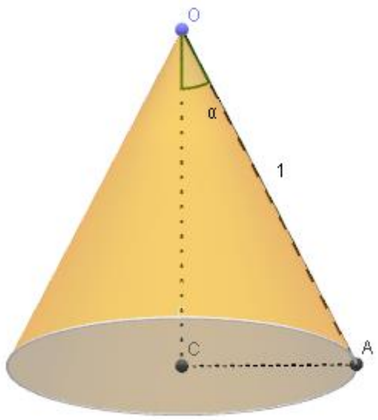
PNI 2002 - PROBLEMA 2

1)

I raggi OA = OB = 1 metro tagliano il cerchio di centro O in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto.





Consideriamo uno dei due coni (quello ottenuto dal settore colorato): l'apotema è 1 e la circonferenza di base è lunga x, che rappresenta anche la misura in radianti dell'angolo alla circonferenza AOB. Indicato con AC il raggio di base del cono, abbiamo:

$$x = 2\pi \cdot \overline{AC} \quad \Longrightarrow \quad \overline{AC} = \frac{x}{2\pi}, \qquad con \quad 0 < x < 2\pi$$

$\overline{OC} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4\pi^2}} \qquad V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{AC}^2 \cdot \overline{OC} = \frac{x^2}{12\pi} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4\pi^2}} = \frac{1}{24\pi} \cdot x^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 - x^2}$

$V_1 = \frac{1}{24\pi} \cdot x^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 - x^2}$ è massimo se lo è: $x^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 - x^2}$ o anche:

$z = x^4 \cdot (4\pi^2 - x^2)$ Risulta: $x^2 \cdot (4\pi^2 - x^2) = 4\pi^2 = costante$ quindi, essendo

$z = (x^2)^2 \cdot (4\pi^2 - x^2)^1$, z risulta massima quando le basi sono proporzionali agli esponenti, ossia:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{4\pi^2 - x^2}{1} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{8}{3}\pi^2 \quad \Longrightarrow \quad x = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{6}$$

Il massimo volume del cono C è:

$$V_1 = \frac{1}{24\pi} \cdot x^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{2}{27}\pi\sqrt{3} \cong 0.403\ m^3 = 403\ dm^3$$

L'arco AB corrispondente al cono di volume massimo è: $x = \frac{2}{3}\pi\sqrt{6} \cong 5.130\ m$

L'ampiezza AOB del settore circolare che dà il volume massimo è:
$x = \dfrac{2}{3}\pi\sqrt{6}\, rad \ \cong 294°$

L'area del settore circolare AOB che realizza il massimo è:
$Area\ settore\ AOB = \frac{1}{2}R \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}\pi\sqrt{6} = \frac{1}{3}\pi\sqrt{6}\, m^2$

Il rapporto percentuale di tale settore rispetto al cerchio è:

$$\frac{Area(settore)}{Area(cerchio)} = \frac{\frac{1}{3}\pi\sqrt{6}}{\pi} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cong 82\ \%$$

Il volume V' del secondo cono è dato da:

$V' = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{AC}^2 \cdot \overline{OC}$, che è come V_1 con $2\pi - x$ al posto di x: $2\pi - x = 2\pi - \frac{2}{3}\pi\sqrt{6}$
Sia ha quindi:

$V' = \cdots \cong 0.325\ m^3 = 325\ dm^3$

2)

Determinare la capacità complessiva, espressa in litri, di C e di C'.

Capacità di C $\cong 403\ dm^3 = 403\ l$
Capacità di C' $\cong 325\ dm^3 = 325\ l$

3)

Determinare un'approssimazione della misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono C, specificando il metodo numerico che si utilizza per ottenerla.

Indicata con α l'apertura del cono (si osservi la figura del cono del punto 1), si ha:

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{AC}}{1} = \frac{x}{2\pi} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cong 0.82 \implies \alpha \cong 54{,}74°$$

Per calcolare il valore approssimato di α con un metodo numerico notiamo che:

$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{6}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, quindi $45° < \alpha < 60°$ (in tale intervallo il seno è crescente).

$\alpha \leftarrow \frac{45°+60°}{2} = 52{,}5°$ $\quad sen\ \alpha = 0.79$ e risulta $0.71 \cong \frac{\sqrt{2}}{2} < 0.79 < \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0.87$,
quindi: $52.5° < \alpha < 60°$

$\alpha \leftarrow \frac{52.5°+60°}{2} = 56{,}25°$ $sen\ \alpha = 0.83$ e risulta $0.79 < 0.83 < 0.87$, quindi:

$52.5° < \alpha < 56{,}25°$

$\alpha \leftarrow \frac{52.5°+56{,}25°}{2} = 54{,}38°$ $sen\ \alpha = 0.81$ e risulta $0.79 < 0.81 < 0.83$, quindi:

$54.4° < \alpha < 56{,}3°$, e così via.