PNI 2002

QUESITO 1

Siano a>0 e b>0.
Media aritmetica: $\frac{a+b}{2}$
Media geometrica: $\sqrt{a \cdot b}$

La media aritmetica di due numeri reali positivi è maggiore o uguale alla media geometrica dei due numeri (è uguale quando i due numeri sono uguali).

Risulta infatti:

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \implies (a+b)^2 \geq 4ab \implies (a-b)^2 \geq 0$ vera per ogni a e b; il particolare vale il segno di uguaglianza se a=b.

QUESITO 2

Giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?

Siano:
p_1 =probabilità di ottenere almeno un 1 con 4 lanci di un dado
q_1 = probabilità di non ottenere mai 1 con 4 lanci di un dado= $\left(\frac{5}{6}\right)^4$
Risulta: $p_1 = 1 - q_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0.509$

Siano:
p_2 =probabilità di ottenere almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi
q_2 = probabilità di non ottenere mai un doppio 1 con 24 lanci di due dadi = $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$
Risulta: $p_2 = 1 - q_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \cong 0.491$

Quindi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado piuttosto che almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?

QUESITO 3

Assumendo che i risultati X, 1, 2 delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.

PRIMO METODO

I casi possibili sono 3^{13} (le disposizioni con ripetizioni di 3 oggetti a 13 a 13).
I casi favorevoli sono $13 \cdot 2$ (una partita risultato 1-2 per 13 partite, tutte le altre X).
La probabilità richiesta è quindi: $p = \frac{26}{3^{13}}$

SECONDO METODO

Utilizziamo la distribuzione binomiale.
La probabilità di 1 successo (X in una partita) è $p = \frac{1}{3}$
Abbiamo 13 partite, che possiamo pensare come 13 prove ripetute, e dobbiamo avere 12 successi (12 pareggi); quindi, secondo la distribuzione di Bernoulli, si avrà:

$$p(13,12) = \binom{13}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\left(\frac{2}{3}\right)^{1} = 13 \cdot \frac{2}{3^{13}} = \frac{26}{3^{13}}$$

QUESITO 4

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{3^n}{n!}$$

Il limite vale 0. Infatti, applicando il criterio del rapporto alla successione $a_n = \frac{3^n}{n!}$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

Quindi $a_n = \frac{3^n}{n!}$, per il criterio del rapporto, è infinitesima.

QUESITO 5

Cosa si intende per "funzione periodica"? Quale è il periodo di $f(x) = -sen\frac{\pi x}{3}$*? Quale quello di* $sen\, 2x$ *?*

Si dice che y = f(x) è periodica di periodo T se T è il più piccolo numero reale positivo tale che

$$f(x+T) = f(x), \qquad \forall x \in I.D.\, di\, f\ e\ x+T\ \in I.D.\, di\, f$$

Si dimostra che se f(x) ha periodo T, la funzione f(a x) ha periodo $\frac{T}{a}$.

Quindi:

- $-sen\frac{\pi x}{3}$ ha periodo $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ $(si\ noti\ che\ sen(x)\ ha\ periodo\ 2\pi)$
- $sen\, 2x$ ha periodo $\frac{2\pi}{2} = \pi$

QUESITO 6

Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio $x^n + px + q$ $(p, q\ \in \mathcal{R})$*, se n è pari ha al più due radici reali, se n è dispari ha al più tre radici reali.*

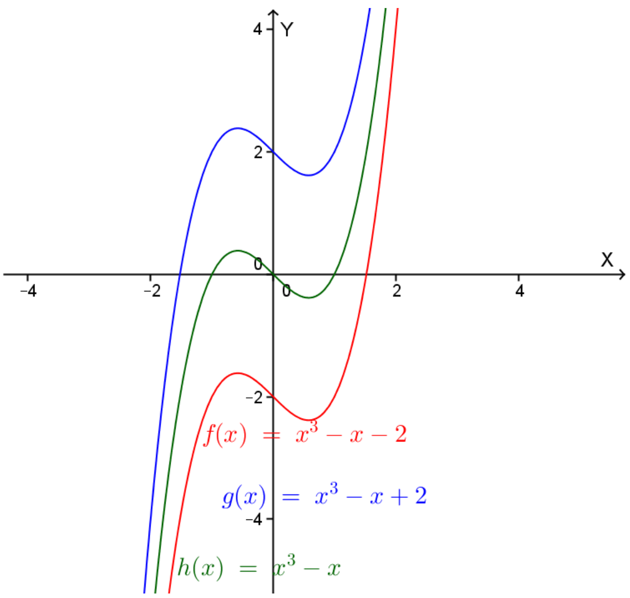
$f(x) = x^n + px + q$ è continua su tutto $\mathcal{R}$

$f'^{(x)} = n \cdot x^{n-1} + p = 0$ se $x^{n-1} = -\frac{p}{n}$

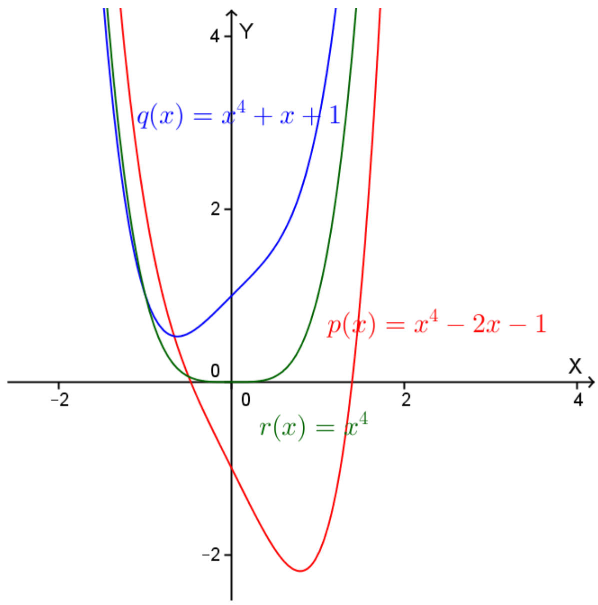
a) Se n è pari, n-1 è dispari, quindi abbiamo un solo zero per la derivata prima; f(x) non può allora annullarsi più di due volte, perché se f(a)=f(b)=0, per il teorema di Rolle, di cui sono soddisfatte le ipotesi di continuità in [a;b] e di derivabilità in (a;b), avremmo tra ogni zero di f almeno uno zero della derivata prima, contro l'ipotesi che essa si annulli una sola volta.

b) Se n è dispari, n-1 è pari, quindi abbiamo al più due zeri per la derivata prima (le eventuali radici opposte di $x^{n-1} = -\frac{p}{n}$), quindi, seguendo lo stesso ragionamento fatto nel punto a), f(x) ha al più tre zeri (se ne avesse più di tre f'(x) avrebbe almeno tre zeri …).

Esempi



(n dispari)



(n pari)

QUESITO 7

Data la funzione $f(x) = e^x - sen\,x - 3x$ calcolarne i limiti per x tendente a +∞ e -∞ e provare che esiste un numero reale α con 0<α<1 in cui la funzione si annulla.

$$\lim_{x\to\pm\infty} (e^x - sen\,x - 3x) = \lim_{x\to\pm\infty} (e^x) = +\infty$$

$(sen\,x \text{ è } limitata\ e\ 3x \text{ è } infinito\ di\ ordine\ inferiore\ rispetto\ ad\ e^x)$

$$\lim_{x\to-\infty} (e^x - sen\,x - 3x) = \lim_{x\to\pm\infty} (-3x) = +\infty$$

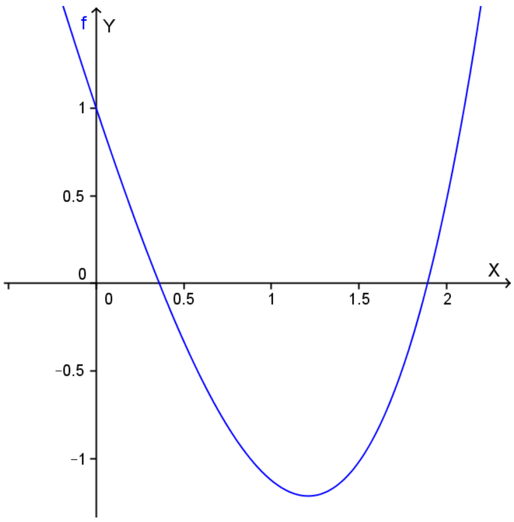
$(sen\,x \text{ è } limitata\ ed\ e^x \text{ è } infinitesimo, quindi\ domina\ l'infinito - 3x)$

Consideriamo l’intervallo $[0; 1]$; in esso f(x) è continua e risulta:

$$f(0) = 1 > 0 \quad ed \quad f(1) = e - sen\,1 - 3 < 0$$

Quindi per il “teorema degli zeri” f(x) si annulla almeno una volta in $(0; 1)$.

In figura è rappresentata la funzione nei pressi dell’intervallo $[0; 1]$.



QUESITO 8

Verificare che la funzione $y = f(x) = 3x + \log x$ è strettamente crescente. Detta g la funzione inversa, calcolare $g'(3)$.

La funzione è definita per x>0 ed ha derivata $f'(x) = 3 + \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0$
Quindi la funzione è sempre crescente.

$Se\ y = 3, \quad 3x + \log x = 3$, verificata per x=1 (unica soluzione essendo f strettamente crescente).

Risulta quindi:

$g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$

QUESITO 9

Trovare f(4) sapendo che $\int_0^x f(t)dt = x \cos \pi\, x$.

Per il teorema di Torricelli risulta:

$$f(x) = D\left(\int_0^x f(t)dt\right) = D(x\cos(\pi x)) = cos(\pi x) - \pi\, x\, sen(\pi x)$$

Quindi $f(4) = \cos(4\pi) - 4\pi\, sen(4\pi) = 1$

QUESITO 10

Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra omotetia e similitudine nel piano.

La similitudine è una particolare affinità in cui si mantengono gli angoli e rimane costante il rapporto tra segmenti corrispondenti; le circonferenze si trasformano in circonferenze.

Equazioni della similitudine (rispettivamente diretta e inversa):

$\begin{cases} x' = ax - by + p \\ y' = bx + ay + q \end{cases}$ (diretta) $\qquad \begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = bx - ay + q \end{cases}$ (inversa)

L'omotetia è una particolare similitudine in cui i punti corrispondenti P e P' sono allineati con un punto fisso O (detto centro dell'omotetia) in modo che: OP' = k OP $(con\ k \neq 0)$
Quindi due figure omotetiche sono due figure simili disposte in modo particolare.
L'omotetia risulta una "similitudine diretta" (cioè conserva l'ordinamento dei punti).

Equazioni dell'omotetia di centro $(x_0; y_o)$ e rapporto k sono:

$\begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0) \\ y' - y_o = k(y - y_o) \end{cases}$ o anche $\begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$ (in cui il centro è il punto unito)

Esempio di triangoli omotetici: