PNI 2003 - PROBLEMA 1

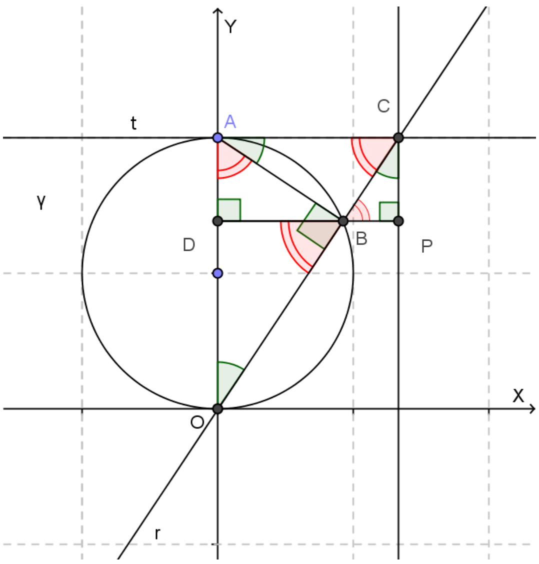
Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro OA=a, la retta t tangente γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C di intersezione di r con t. La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t si intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ (**versiera di Agnesi**).

1)

Si chiede di dimostrare che valgono le seguenti proporzioni:

OD:DB=OA:DP
OC:DP=DP:BC

ove D è la proiezione ortogonale di B su OA.



Dalla similitudine fra i triangoli ODB e OAC segue;

OD:DB=OA:AC   ed essendo AC=DP è dimostrata la prima proporzione.

Dalla similitudine fra i triangoli OAC e ABC segue:

OC:AC=AC:BC   ed essendo AC=DP è dimostrata la seconda proporzione.

ANIMAZIONE REALIZZATA CON GEOGEBRA

2)

Con riferimento alla figura precedente si ha:

t: y = a , r: y = mx , γ: $x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4} \implies x^2+y^2-ay=0$

$$B: \begin{cases} y = mx \\ x^2+y^2-ay=0 \end{cases} \implies B=\left(\frac{am}{1+m^2};\frac{am^2}{1+m^2}\right)$$

$$C: \begin{cases} y = a \\ y = mx \end{cases} \implies C=\left(\frac{a}{m};a\right)$$

Retta PC: $x=\frac{a}{m}$ Retta PB: $y=\frac{am^2}{1+m^2} \implies P=\left(\frac{a}{m};\frac{am^2}{1+m^2}\right)$

Il luogo richiesto ha quindi le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{m} \\ y = \frac{am^2}{1+m^2} \end{cases}$$

da cui, ricavando m dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda:

$$\boldsymbol{y=\frac{a^3}{x^2+a^2}}$$

come richiesto.

3)

Scelta l'unità di misura uguale al raggio della circonferenza (quindi a=2) si ottiene l'equazione:

$$\boldsymbol{y=\frac{8}{x^2+4}}$$

Questa funzione è definita su tutto l'asse reale, è pari, è sempre positiva ed ha come asintoto orizzontale la retta di equazione y=0 (come si evince facilmente calcolando il limite per x che tende a infinito).

Studiamo la derivata prima:

$\boldsymbol{y'=-\frac{16x}{(x^2+4)^2}}$: positiva per x< 0, negativa per x >0, nulla in x= 0; quindi la funzione cresce per x< 0, decresce per x >0 ed ha un massimo (assoluto) per x = 0; M=(0;2).

Studiamo la derivata seconda:

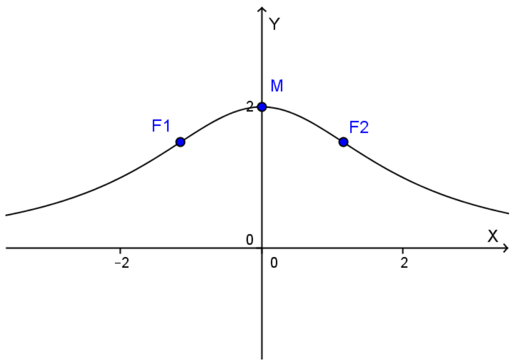
$y'' = \frac{16\,(3x^2-4)}{(x^2+4)^3}$

y''>0 se $3x^2 - 4 > 0$, $x < -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ or $x > \frac{2\sqrt{3}}{3}$, dove la funzione è concava verso l'alto.

y''<0 se per $-\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$, dove la funzione è concava verso il basso.

In $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ abbiamo dei flessi, di ordinata 3/2 .

Questo è il grafico Γ della funzione di equazione $y = \frac{8}{x^2+4}$



L'area del cerchio, per a generico, è $\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi\frac{a^2}{4}$

L'area della regione compresa tra Γ ed il suo asintoto è data da:

$2\int_o^{+\infty} f(x)dx = 2\lim_{k\to+\infty}\int_o^k f(x)dx = 2\lim_{k\to+\infty}\int_o^k \frac{a^3}{x^2+a^2}dx = \ldots =$

$= 2\lim_{k\to+\infty}\left[a^2 arctg\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^k = \pi a^2 = 4\left(\pi\frac{a^2}{4}\right)$