PNI 2003 - PROBLEMA 2

$\boldsymbol{f(x) = a \cdot 2^x + b \cdot 2^{-x} + c}$ con a, b, c numeri reali.

Si chiede di determinare a, b e c in modo che:

1)

la funzione sia pari.

Deve essere f(-x)=f(x) quindi:

$\boldsymbol{a \cdot 2^{-x} + b \cdot 2^x + c = a \cdot 2^x + b \cdot 2^{-x} + c \quad \Longrightarrow \quad (a-b) \cdot 2^{-x} = (a-b) \cdot 2^x}$

da cui: a-b= 0, **a=b (1)**

2)

si abbia f(0)= 2 $\Longrightarrow a + b + c = 2 \Longrightarrow \boldsymbol{c = 2 - b - a = 2 - 2a}$ **(2)**

3)

Si abbia: $\boldsymbol{\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2\,ln\,2}}$

$$\int_0^1 (a \cdot 2^x + b \cdot 2^{-x} + c)dx = \left[\frac{a \cdot 2^x}{ln\ 2} - \frac{b \cdot 2^{-x}}{ln\ 2} + cx\right]_0^1 = \frac{2a}{\ln 2} - \frac{b}{2\ ln\ 2} + c - \frac{a}{\ln 2} + \frac{b}{ln\ 2} =$$
$$= \frac{a}{\ln 2} + \frac{b}{2\ ln\ 2} + c = \frac{3}{2\ln 2} \Longrightarrow 2a + b + 2c = 3$$

E tenendo conto della (1) e della (2) si trova a=b=1 e c=0.

La funzione richiesta è quindi:

$\boldsymbol{g(x) = 2^x + 2^{-x}}$

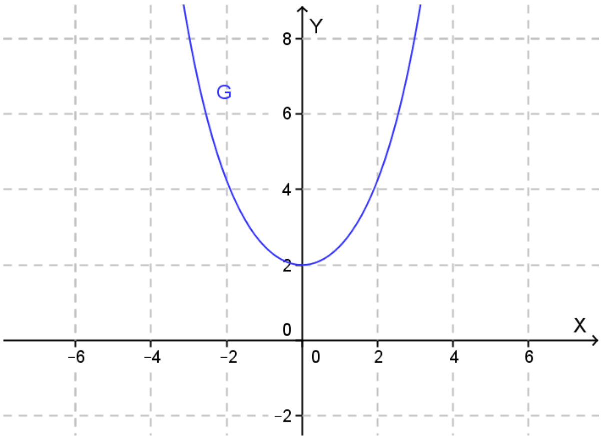
Tale funzione è definita per ogni x, è pari, è sempre positiva e risulta:

$\lim_{x \to \mp\infty} g(x) = +\infty$

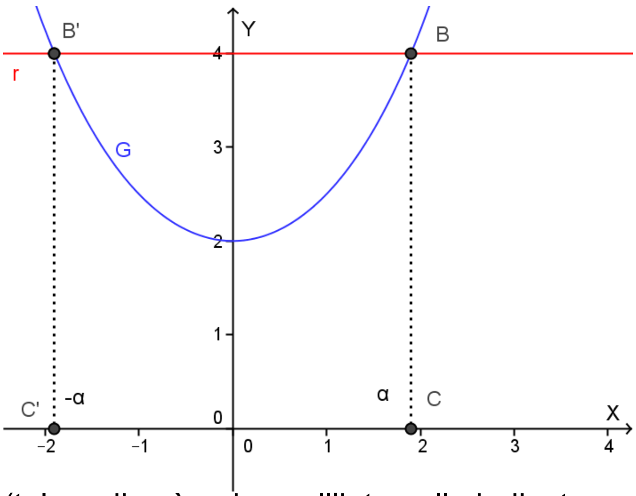
$g'(x) = \ln(2) \cdot 2^x - \frac{\ln(2)}{2^x}$ che risulta >0 se x>0, quindi in x=0 abbiamo un minimo che vale g(0)=2.

$g''(x) = \ln(2)^2 \cdot 2^x + \frac{\ln(2)^2}{2^x}$ che risulta >0 per ogni x, quindi la concavità è sempre verso l'alto.

Il grafico G della g è quindi il seguente:



Consideriamo ora la retta r di equazione y = 4 e determiniamo, con un procedimento iterativo a scelta, dei valori approssimati delle ascisse dei punti di intersezione di G con la retta r.



Indichiamo con α $e - \alpha$ le ascisse dei punti di intersezione e detrminiamo un'approssimazione di α per esempio con il **metodo di bisezione**.

Poniamo

$$\boldsymbol{h(x) = 2^x + 2^{-x} - 4}$$

Siccome risulta h(1)<0 e h(2)>0, essendo la funzione continua nell'intervallo chiuso [1; 2], per il teorema degli zeri avremo almeno una radice α compresa tra 1 e 2 (tale radice è unica nell'intervallo indicato, come si evince dal grafico precedente).
Quindi: $1 < \alpha < 2$
Poniamo $c_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5$; risulta $h(1.5) < 0$ quindi: $1.5 < \alpha < 2$
Poniamo $c_2 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$; risulta $h(1.75) < 0$ quindi: $1.75 < \alpha < 2$
E così via …..

(un valore meglio approssimato è $\alpha = 1.89996$)

N.B.

Le ascisse richieste si possono trovare risolvendo algebricamente l'equazione
$\boldsymbol{2^x + 2^{-x} - 4 = 0}$ che equivale a $\boldsymbol{2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0}$ che ha come soluzioni:

$2^x = 2 \pm \sqrt{3}$, cioè: $x = log_2(2 \pm \sqrt{3})$.

Calcolare l'area della regione finita di piano racchiusa tra r e G.

L'area richiesta è data da:

$$2\int_0^{\alpha}(4-2^x-2^{-x})dx = 2\left[4x-\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_0^{\alpha} = 2\left(4\alpha-\frac{2^{\alpha}}{\ln 2}+\frac{2^{-\alpha}}{\ln 2}\right) \cong \mathbf{5.20\ u^2}$$

Si calcoli $\int \frac{1}{g(x)}dx$

$$\int \frac{1}{g(x)}dx = \int \frac{1}{2^x+2^{-x}}dx = \int \frac{2^x}{1+2^{2x}}dx$$

Poniamo $2^x = t$ da cui $2^x \ln 2\, dx = dt$

$$\int \frac{2^x}{1+2^{2x}}dx = \int \frac{\frac{1}{\ln 2}}{1+t^2}dt = \frac{1}{\ln 2}\ arctg\ 2^x + K$$

Determinare la funzione g' il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r.

Le equazioni della simmetria rispetto alla retta di equazione y=4 sono:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 8-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = 8-y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \longrightarrow x \\ y \longrightarrow 8-y \end{cases}$$

La funzione g' si ottiene da g sostituendo x con x e y con 8-y:

$$8-y = g(x) \Rightarrow y = 8-g(x) \Rightarrow y = 8-2^x-2^{-x}$$