PNI 2004 - PROBLEMA 1

Sia γ la curva di equazione: $y = ke^{-\lambda x^2}$, ove k e λ sono parametri positivi.

1)

y>0 per ogni x; se x=0 y=k; f(-x)=f(x): funzione pari.

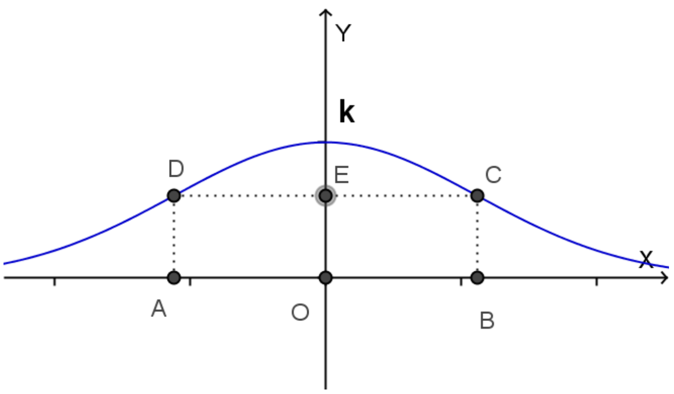
$\lim_{x \to \pm\infty} y = 0^+$

$y' = -2\,\lambda k x e^{-\lambda x^2} > 0$ se x<0; quindi la funzione cresce per x<0 e decresce per x>0. Abbiamo un massimo per x=0 di ordinata y=k.

$y'' = 2\,\lambda k e^{-\lambda x^2}(2\lambda x^2 - 1) > 0$ per $x < -\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$, $x > +\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$: in tali intervalli la concavità è verso l'alto, invece per $-\sqrt{\frac{1}{2\lambda}} < x < \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$ la concavità è verso il basso. Per $x = \mp\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$ abbiamo dei flessi, la cui ordinata è

Quindi la funzione ha la concavità verso $f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}\right) = ke^{-\frac{1}{2}} = \frac{k}{\sqrt{e}}$

Il grafico della funzione è il seguente:



2)

$\mathcal{A}(ABCD) = max$ se lo è $\mathcal{A}(OBCE) = x \cdot f(x)$ con x>0

$y = x \cdot f(x) = kxe^{-\lambda x^2}$

$y' = ke^{-\lambda x^2}(1 - 2\lambda x^2)$>0 se $-\sqrt{\frac{1}{2\lambda}} < x < \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$ quindi, con la limitazione sulla x: la funzione cresce in $0 < x < \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$ e decresce per $x > \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$ pertanto abbiamo il massimo richiesto per $\boldsymbol{x} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\lambda}}}$.

3)

$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{e^{-x^2} dx} = \sqrt{\boldsymbol{\pi}}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx$$

Ponendo $\frac{x}{\sqrt{2}} = t$ da cui $dx = \sqrt{2}dt$, l'integrale diventa:

$k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot \sqrt{2}\, dt = k\sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{2}\, k \sqrt{\pi} = 1$ se $\boldsymbol{k} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}}$

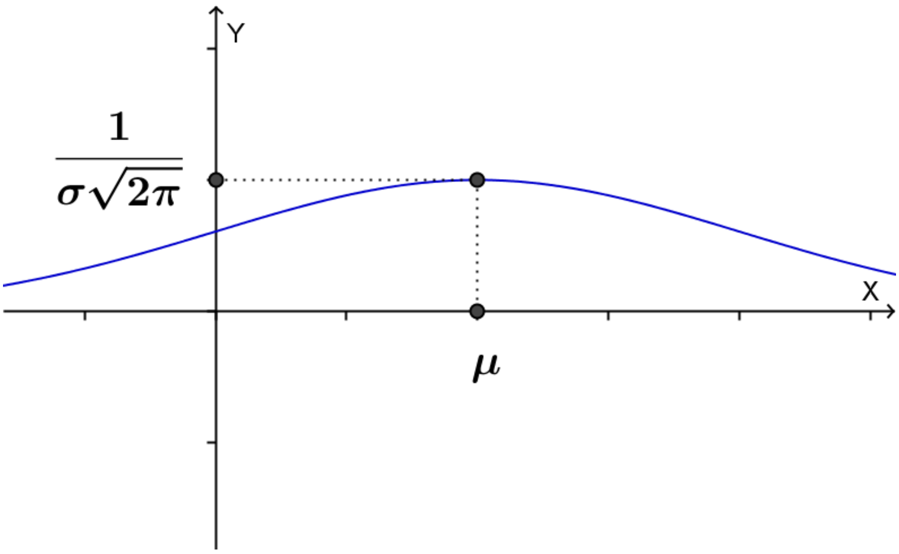
4)

Con $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ e $\boldsymbol{k} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}}$ la curva γ ha equazione:

$\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}} \boldsymbol{e^{-\frac{1}{2}x^2}}$, che si ottiene per $\sigma = 1\ e\ \mu = 0$ dalla distribuzione di Gauss:

$\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}} \boldsymbol{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$ (media μ e deviazione standard σ).

Per $\mu \neq 0$ e $\sigma \neq 1$ il grafico assume l'andamento indicato nella figura seguente:



In particolare indichiamo i grafici con $\mu \neq 0$ e $\sigma = 1$, $\sigma > 1$ e $\sigma < 1$