PNI 2004 - PROBLEMA 2

Sia f la funzione così definita: $\boldsymbol{f(x) = sen\left(\frac{\pi}{a}x\right) cosx\left(\frac{\pi}{2b}x\right) + x}$
con a e b parametri reali diversi da zero.

1)

Dobbiamo dimostrare che l'equazione $\boldsymbol{f(x) = \frac{a+b}{2}}$ ammette sempre soluzioni.
Notiamo che **f(a)=a, f(b)=b**.

Essendo la funzione continua nell'intervallo [a; b] essa assume ogni valore compreso tra f(a) ed f(b), per il teorema di Darboux.
Siccome $\boldsymbol{\frac{a+b}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2}}$ è un valore compreso tra f(a) ed f(b), la tesi è dimostrata.

2)

Con a=2b=2 (a=2 e b=1) si ottiene:

$\boldsymbol{g(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) cosx\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x}$. Utilizzando la formula di duplicazione del seno si ottiene:

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2} sen\,(\pi x) + x}$$

Se x=0 y=0, g(-x)=g(x), quindi si tratta di una funzione dispari.

$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$

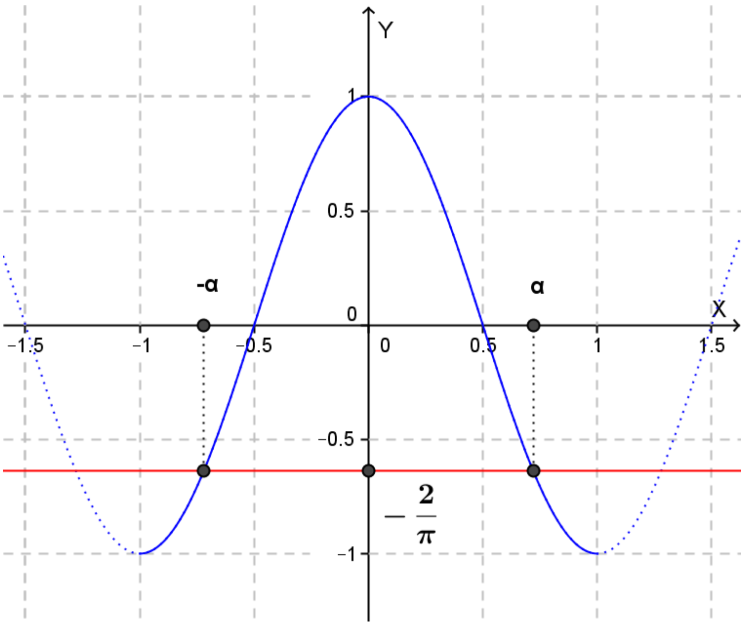
Non esistono asintoti obliqui perché:
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{2}sen\,(\pi x)+x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{\frac{1}{2}sen\,(\pi x)}{x} + 1\right) = 1 = m$

Ma $\lim_{x\to\pm\infty}(g(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}sen\,(\pi x)\right) = non\ esiste$

$g'(x) = \frac{\pi}{2}cos\,(\pi x) + 1 = 0$ se $cos\,(\pi x) = -\frac{2}{\pi}$

Risolviamo graficamente notando che la funzione $y = cos\,(\pi x)$ ha periodo $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

(rappresentiamo la funzione per comodità nell'intervallo [-1;1]).



L'equazione $cos\ (\pi x) = -\frac{2}{\pi}$ ha le soluzioni:

$x = \pm\alpha + 2k \ \ (k\epsilon\mathbb{Z})$

con $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

Risulta poi:

$g'(x) = \dfrac{\pi}{2} cos\ (\pi x) + 1 > 0$

se: $cos\ (\pi x) > -\frac{2}{\pi}$

$-\alpha + 2k < x < -\alpha + 2k$

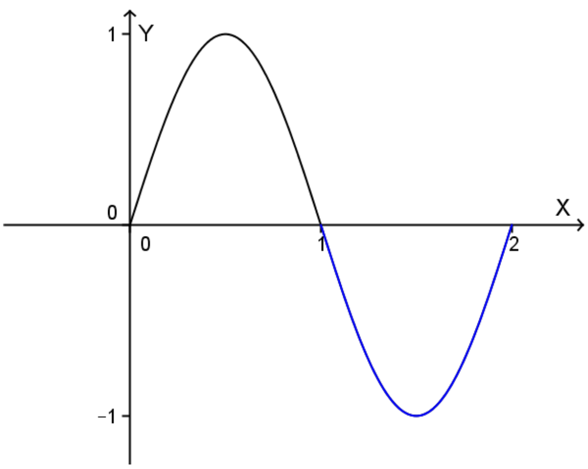
in tale intervallo, limitatamente a [-1;1] quindi la funzione è crescente, negli intervalli

$-1 < x < -\alpha$, $\alpha < x < 1$ è decrescente. Pertanto la funzione ha:

minimi relativi per $x = -\alpha + 2k$
massimi relativi per $x = \alpha + 2k$

Studiamo ora la derivata seconda.

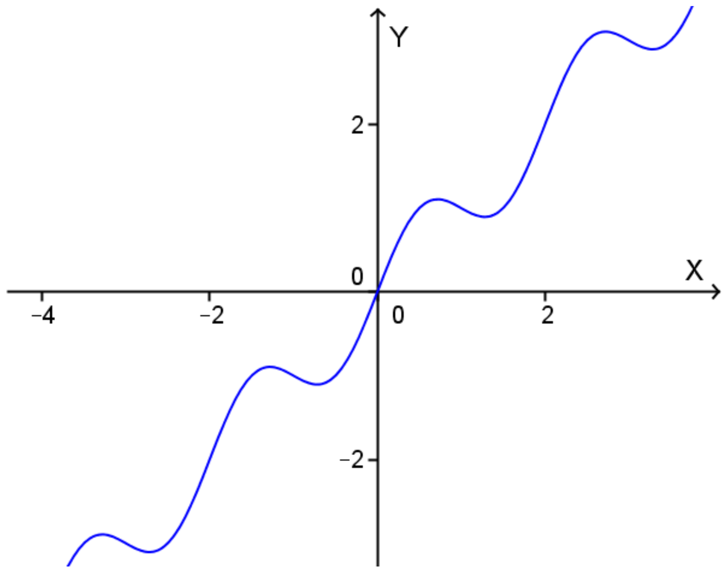
$g''(x) = -\frac{\pi^2}{2} sen\ (\pi x) > 0$ se $sen\ (\pi x) < 0,\ \ 1 + 2k < x < 2 + 2k$ (v. grafico)



Quindi avremo dei **flessi** per

$x = 1 + 2k$ e $x = 2 + 2k \ \ (k\epsilon\mathbb{Z})$

Il grafico della funzione $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2} sen\ (\pi x) + x}$ è quindi il seguente:



3)

Si chiede di trovare un valore approssimato della soluzione dell'equazione:

$g'(x) = \frac{\pi}{2} cos\,(\pi x) + 1 = 0 \implies \boldsymbol{\pi\ cos\ (\pi x) + 2 = 0}$ **con** $\boldsymbol{\frac{1}{2} \leq x \leq 1}$

Consideriamo nell'intervallo suindicato la funzione

$f(x) = \pi\ cos\ (\pi x) + 2$, continua e derivabile in $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}] = \left[\boldsymbol{\frac{1}{2}}; \boldsymbol{1}\right]$.

Utilizziamo il metodo di **bisezione**.

$f(a) = 2\ \ ed\ \ f(b) = -1.14$

$c = \frac{a+b}{2} = 0.75 \quad f(c) = -0.22 < 0$, quindi la soluzione è in $\boldsymbol{0.5 < x < 0.75}$

$c = \frac{a+b}{2} = \frac{0.5+0.75}{2} \cong 0.63 \quad f(c) = 0.8 > 0$, quindi la soluzione è in $\boldsymbol{0.63 < x < 0.75}$

e così via …… (si arriva a $x \cong 0.7$)