# PNI 2004

## QUESITO 1

Il grado sessagesimale è definito come la novantesima parte dell'angolo retto.

Il grado centesimale è definito come la centesima parte dell'angolo retto.

La misura in radianti $\alpha$ di un angolo è definita come il rapporto tra la lunghezza dell'arco $\ell$ ed il raggio R individuati su una generica circonferenza con centro nel vertice dell'angolo dato: $\alpha = \frac{\ell}{R}$. Da questa definizione si deduce che 1 radiante corrisponde alla misura di quell'angolo al centro di una circonferenza a cui corrisponde un arco che, rettificato, ha la stessa lunghezza del raggio.

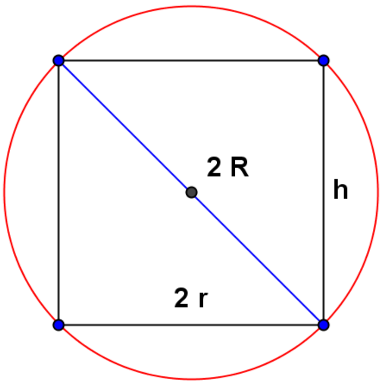
Tra la misura $\alpha°$ in gradi e la misura $\alpha$ in radianti dello stesso angolo sussiste la relazione:

$$\boldsymbol{\alpha°:\alpha = 180°:\pi}$$

Ponendo in questa relazione $\alpha = 1$ troviamo l'equivalente in gradi di 1 radiante:

$\alpha = 1\,rad \quad \Longrightarrow \quad \alpha° = 57.29577951 \ldots \cong 57°17'44'',8$

## QUESITO 2




$$h = 2r;\, 2R = h\sqrt{2} = 2r\sqrt{2} \;\Longrightarrow \boldsymbol{R = r\sqrt{2}}$$

La superficie totale del cilindro è:

$$S_{cil}^{T} = 2\,\pi rh + 2\,\pi r^2 = 6\,\pi r^2$$

La superficie della sfera è:

$$S_{sfera} = 4\,\pi R^2 = 8\,\pi r^2$$

Quindi il rapporto richiesto è:

$$\frac{S_{cil}^{T}}{S_{sfera}} = \frac{6\,\pi r^2}{8\,\pi r^2} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

## QUESITO 3

Se il rapporto di similitudine è $k = 3$, il rapporto tra le aree è $k^2 = 9$ e quello tra i volumi è $k^3 = 27$.

Quindi le relazioni tra i volumi e le aree sono: $\boldsymbol{V' = 27\,V \;\; e \;\; S' = 9\,S.}$

## QUESITO 4

Consideriamo i due insiemi: $A = \{1, 2, 3, \ 4\} \ e \ B = \{a, b, c\}$. Si chiede di determinare il numero delle applicazioni (funzioni) di A in B.

Tale numero corrisponde al numero delle disposizioni con ripetizioni di 3 oggetti (quelli del secondo insieme) a 4 a 4 (quelli del primo insieme), che è pari a $\mathbf{3^4 = 81}$.

Nel nostro caso abbiamo le seguenti possibilità:

L'1 può andare in a, b, c. Lo stesso per il 2, il 3 ed il 4. Quindi i casi possibili sono:

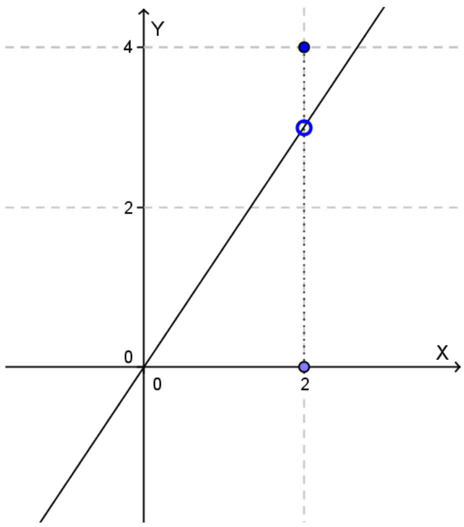
3x3x3x3 = $3^4$ = 81.

## QUESITO 5

Un esempio di funzione con le caratteristiche richieste è la seguente:

$$\boldsymbol{g(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}}$$

Indichiamo il grafico della funzione g:

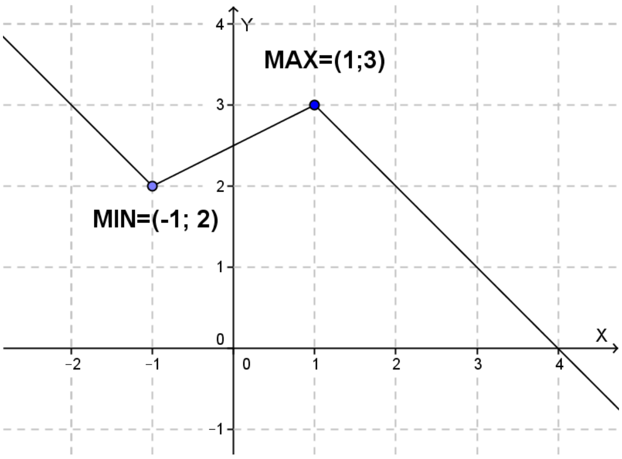


## QUESITO 6

Un esempio di funzione f(x) con un massimo relativo in (1; 3) e minimo relativo in (-1; 2) è la seguente:

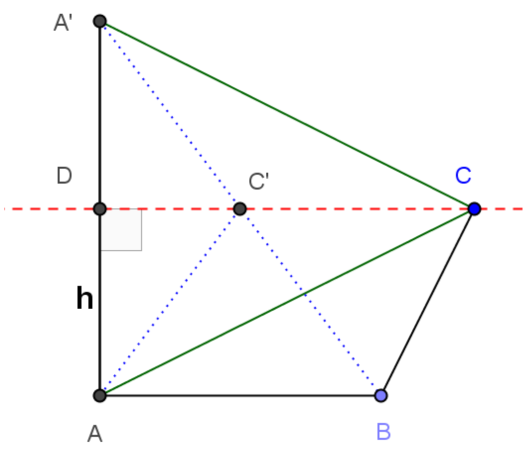
$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}-x+1, & x\leq 1\\ \frac{1}{2}x+\frac{5}{2}, & -1<x<1\\ -x+4, & x\geq 1\end{cases}}$$

Indichiamo il grafico della funzione f:




## QUESITO 7

Dobbiamo dimostrare che *tra tutti i triangoli equivalenti di base assegnata quello isoscele ha il perimetro minimo.*




Siccome l'area e la base AB sono costanti, allora sarà costante anche l'altezza h relativa ad AB. Per dimostrare che il perimetro è minimo è sufficiente dimostrare che è minima la somma

**BC+ AC**.

Consideriamo il simmetrico A' di A rispetto alla retta per C parallela ad AB (che è a distanza h da AB). Risulta A'C=AC, quindi deve essere minima la somma **BC+A'C**. Questa somma è minima quando C coincide con C' (allineato con A' e B). Ma C' è il punto medio di A'B (*la parallela ad AB dal punto medio D del lato AA' incontra il lato A'B nel suo punto medio*). AC' è quindi la mediana relativa all'ipotenusa A'B del triangolo rettangolo

ABA' pertanto è uguale alla metà dell'ipotenusa stessa, cioè: AC'=BC'. E questo dimostra che il triangolo che realizza il minimo richiesto è isoscele sulla base AB.

## QUESITO 8

Cerchiamo due numeri reali **a** e **b** (diversi) che hanno somma e prodotto uguali.

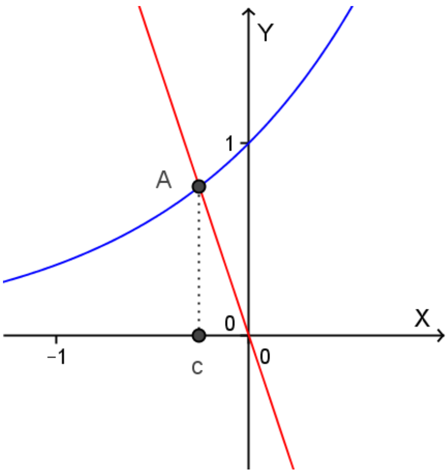
$$\boldsymbol{a+b=a\cdot b \quad (a\neq b)}$$

Abbiamo $a(b-1)=a \implies a=\frac{b}{b-1} \quad (b\neq 1)$. Quindi, per esempio, **b=3 e a=3/2.**

## QUESITO 9

Consideriamo l'equazione: $\boldsymbol{e^x+3x=0}$**.**
*L'equazione ammette una ed una sola soluzione.*

A tal fine è sufficiente rappresentare nello stesso sistema di riferimento le curve di equazione:
$y=e^x$ e $y=-3x$ e notare che si intersecano una sola volta (per x<0).




**OPPURE**

Considero la funzione $\boldsymbol{f(x)=e^x+3x}$
Risulta f(0) = 1 > 0, f(-1) = $e^{-1}$ – 3 < 0
quindi per il *teorema degli zeri* applicato all'intervallo [ - 1; 0] (in cui la funzione è continua), l'equazione ammette almeno una soluzione tra -1 e 0. Tale soluzione è unica poiché $\boldsymbol{f'(x)=e^x+3>0}$ per ogni x, quindi la funzione è strettamente crescente.

Per calcolare un valore approssimato della soluzione utilizziamo il *metodo delle tangenti*.
Calcoliamo la derivata seconda della funzione per poter scegliere il punto iniziale dell'iterazione: $\boldsymbol{f''(x)=e^x>0}$ per ogni x: siccome f''(x) ha lo stesso segno di f(b)=f(0)=1, il punto iniziale sarà a= -1.
La formula iterativa è:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Che possiamo vedere nella forma $x\leftarrow x-\frac{\boldsymbol{e^x+3x}}{\boldsymbol{e^x+3}}=\frac{\boldsymbol{xe^x-e^x}}{\boldsymbol{e^x+3}}=\frac{\boldsymbol{e^x(x-1)}}{\boldsymbol{e^x+3}}$
Ponendo x=a= -1 in $\boldsymbol{x}\leftarrow\frac{\boldsymbol{e^x(x-1)}}{\boldsymbol{e^x+3}}$ otteniamo $x_1$ = - 0.2185
Per x= - 0.2185 otteniamo $x_2$ = - 0.2575
Per x= - 0.2575 otteniamo $x_3$ = - 0.2576
Per x= - 0.2576 otteniamo $x_4$ = - 0.2576
Quindi un valore approssimato è **- 0.257** a meno di un millesimo.

## QUESITO 10

$$\begin{cases} x' = x\sqrt{3} - y \\ y' = x + y\sqrt{3} \end{cases}$$

Sia tratta di una similitudine diretta, le cui equazioni sono del tipo:

$$\begin{cases} x' = ax - by + p \\ y' = bx + ay + q \end{cases}$$

Calcoliamo il determinante che fornisce il quadrato del rapporto di similitudine (cioè il rapporto fra le aree di due figure corrispondenti):

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 = k^2$$

Quindi il rapporto di similitudine è **k = 2**.
La similitudine data ha l'origine come punto unito.